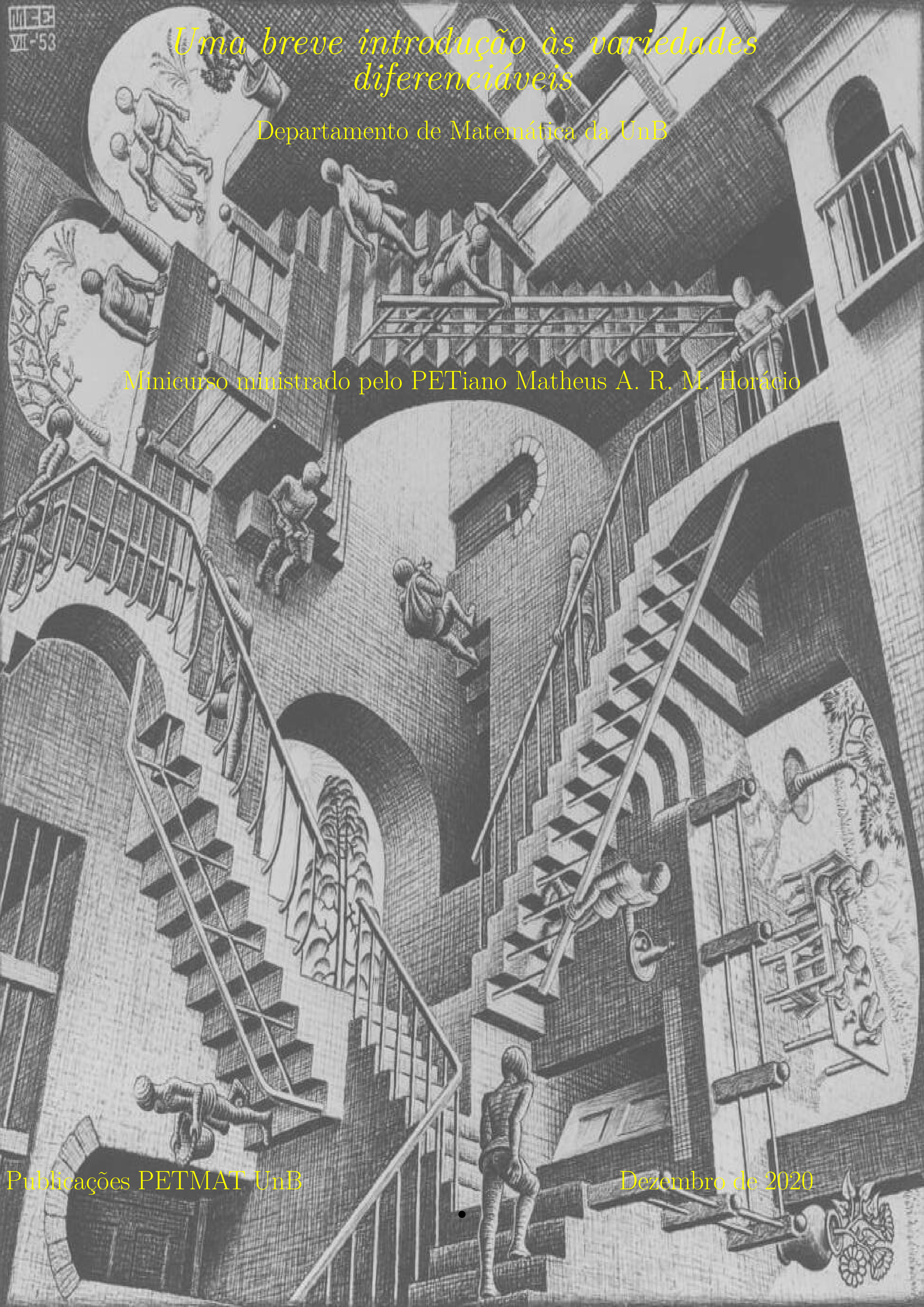

Uma breve introdução às variedades diferenciáveis

Departamento de Matemática da UnB

Minicurso ministrado pelo PETiano Matheus A. R. M. Horácio

Publicações PETMAT UnB

Dezembro de 2020

•

Sumário

Petianos:

Ayrton Anjos
Caio Tomás
Davi Batisaco
Giulia Albuquerque
Hebert Luan
Jorge Lucas
Matheus Freitas
Railandi Sousa
Thais Marçal
Thailany Machado
Carlos Campos
Manoel Fernando dos Reis
Bárbara Guerra Ribeiro
Matheus Andrade Ribeiro de Moura Horácio

Tutora do PETMAT: Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues

Prefácio e agradecimentos

Elaborei o conteúdo desse minicurso sempre pensando no que eu gostaria de ter visto quando estava aprendendo o assunto. É natural que outras pessoas gostariam de ter visto outras perspectivas, mas penso que o conteúdo aqui é em grande parte satisfatório o suficiente para basicamente todo mundo, ainda mais como uma introdução. Gostaria de ter tido mais tempo para apresentar mais conceitos, mas no final das contas é um *mini*-curso. Os pré-requisitos ideais para estudar esse assunto como visto aqui são somente análise no $\mathbb{R}^n$ e topologia geral (embora no futuro próximo, mesmo que além do escopo desse minicurso, um bom conhecimento de álgebra multilinar também se faz necessário), mas isso dificilmente é um impedimento para o leitor persistente, e aos interessados encorajo fortemente que sejam persistentes! Eu mesmo sou um grande fã de "dar saltos maiores que as pernas": mesmo que você se machuque no caminho, no final a experiência vale muito a pena.

Agradeço ao Rodrigo Duarte, pela amizade que sempre me incentivou a ir além de onde achava possível, sem a qual com certeza não teria aprendido tudo que mostro aqui a tempo de apresentar esse minicurso. Agradeço também ao meu orientador de iniciação científica durante a graduação, o professor João Paulo dos Santos, pela guia, paciência, pelo incentivo e por sempre ter aceito embarcar junto comigo em aventuras que pareciam imprudentes a nível de graduação, o que tornou possível a elaboração desse minicurso. Agradeço também à professora e tutora do PETMAT UnB Luciana Ávila pelo excelente trabalho em ter tornado o grupo no que foi durante a época em que participei do mesmo, sem o qual provavelmente esse minicurso também não teria sido elaborado. Agradeço ao IMPA por ter disponibilizado online as videoaulas do curso de Análise em Variedades, que foram uma base principal desse minicurso. Finalmente, agradeço ao FNDE/MEC pelo apoio financeiro enquanto fui bolsista do PETMAT UnB.

1 Preliminares

1.1 Um pouquinho de topologia

Dar uma topologia a um conjunto $\mathcal{M}$ arbitrário consiste em especificar exatamente quais de seus subconjuntos deverão ser chamados de "abertos". Tais subconjuntos deverão ter propriedades familiares: $\mathcal{M}$ e $\emptyset$ são abertos, a interseção de quaisquer dois abertos deve permanecer um aberto, assim como a união arbitrária (finita ou infinita, enumerável ou não). Mais precisamente, diremos que uma topologia em $\mathcal{M}$ é uma coleção $\tau \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ (cujos elementos serão chamados de abertos) tal que

- $\mathcal{M}$ e $\emptyset$ são abertos
- $U_1 \cap U_2 \in \tau$ sempre que $U_1, U_2 \in \tau$
- $\displaystyle\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$ para qualquer coleção $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de abertos de $\mathcal{M}$ (onde I é uma família arbitrária de índices)

Exercício 1. *Mostre que qualquer interseção finita de abertos ainda é um aberto.*

Mas aí você pode se perguntar: porque a topologia deveria consistir de abertos? E porque queremos que eles satisfaçam tais propriedades? A seguinte explicação, encontrada em [1], faz um bom trabalho em esclarecer essas dúvidas.

Podemos pensar da topologia como "a arte de medidas imprecisas" ou "geometria sem distância", num sentido que pode ser deixado mais (rs) preciso da seguinte maneira: num mundo perfeito, você poderia imaginar reguas que conseguem medir comprimentos com precisão exata. Isso é, nesse mundo existem réguas de comprimento exato e cada régua vem com uma marcação de comprimento: assim, para provar que certo objeto tem comprimento ℓ, bastaria segurar a régua marcada ℓ perto do objeto e estaria demonstrado que o objeto de fato tem comprimento *exatamente* ℓ.

Mas vivemos num mundo imperfeito, e em nosso mundo imperfeito só existem réguas com tolerância. O melhor que podemos fazer é a cada régua com tolerância associar um conjunto U de números reais com a propriedade de que sempre que ℓ está em U, a régua consegue te dizer com certeza: de fato, $\ell \in U$. Chamaremos tal régua de R_U.

Dadas duas réguas R_U e R_V, você pode facilmente provar que um dado comprimento se encontra dentro de $U \cup V$. Basta usar a régua R_U e depois a R_V: se uma das réguas acusarem um resultado positivo, o comprimento com certeza está em $U \cup V$. Podemos então pensar na régua $R_{U \cup V}$ como uma espécie de régua virtual. Analogamente podemos determinar outra régua $R_{U \cap V}$.

Agora, se tivermos uma família infinita de réguas, digamos, $\{R_{U_i}\}_{i \in I}$, também é fácil mostrar que um dado comprimento se encontra em $\displaystyle\bigcup_{i \in I} U_i$: se ele realmente estiver nessa união, ele está em algum U_i, e basta você exibir a régua R_{U_i} apropriada para o i correspondente.

Mas não podemos fazer o mesmo para $\displaystyle\bigcap_{i \in I} U_i$: pode acontecer de precisarmos de uma demonstração infinita para constatarmos que todos os R_{U_i} nos dão um resultado positivo. Informalmente, podemos pensar então que uma topologia é um conjunto (generalizado) de réguas que se encaixa na descrição acima.

Terminologia. *Uma vizinhança de* $p \in \mathcal{M}$ *é um aberto* U_p *de* $\mathcal{M}$ *tal que* $p \in U_p$. *Um espaço topológico é um par* $(\mathcal{M}, \tau_{\mathcal{M}})$. *Quando a topologia de* $\mathcal{M}$ *é entendida implicitamente, escrevemos simplesmente* $\mathcal{M}$ *ao invés do par.*

Definição 1. *Se* X *é um espaço topológico e* $U \subset X$, *a topologia de* U *induzida por* X *é definida como* $\tau_U \doteq \{U \cap A \mid A \in \tau_X\}$: *ou seja, são os abertos de* X *vistos por* U.

Definição 2. *Uma função* $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ *entre dois espaços topológicos é dita contínua quando* $f^{-1}(O_Y) \in \tau_X$ *seja qual for* $O_Y \in \tau_Y$.

Exercício 2. *Mostre que a definição anterior é equivalente ao seguinte: para cada* $x \in X$ *e cada vizinhança* V *de* $f(x)$, *existe uma vizinhança* U *de* x *tal que* $f(U) \subset V$.

Exercício 3. *Sejam* X, Y *e* Z *espaços topológicos. Mostre que as seguintes aplicações são contínuas:*

- *A aplicação identidade* $Id_X : X \to X$ *definida por* $\mathrm{Id}_X(x) = x$ *para cada* $x \in X$;
- *Qualquer função constante* $F : X \to Y$ *(ou seja, uma função tal que* $F(x) = F(y)$ *sejam qual forem* $x, y \in X$*)*
- *Qualquer composição* $G \circ F$ *de aplicações contínuas* $F : X \to Y$ *e* $G : Y \to Z$

Exercício 4. *Mostre que continuidade é um fenômeno local: ou seja,* $F : X \to Y$ *é contínua se e somente se em cada ponto* $p \in X$ *existe uma vizinhança* $X \supset U_p \ni p$ *tal que* $F|_U$ *é contínua.*

Em geral não queremos estar presos a ter que definir absolutamente todo aberto de um espaço para muni-lo de alguma topologia. Aí entram as bases de espaços topológicos.

Definição 3. *Uma coleção* $\mathcal{B}$ *de subconjuntos abertos de um espaço topológico* X *é dita uma base para a topologia de* X *se cada aberto de* X *se escreve como uma união de elementos de* $\mathcal{B}$. *Ainda mais geralmente, se* X *é meramente um conjunto (a priori sem nenhuma topologia) e* $\mathcal{B}$ *é uma coleção de subconjuntos de* X *satisfazendo:*

- $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$
- *Se* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ *e* $x \in B_1 \cap B_2$, *existe* $B_3 \in \mathcal{B}$ *tal que* $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Então a coleção de todas as uniões de elementos de $\mathcal{B}$ *define uma topologia em* X, *denominada a topologia gerada por* $\mathcal{B}$, *que é naturalmente uma base para a topologia assim gerada.*

Definição 4. *Um espaço topológico* X *é dito Hausdorff quando para todo* $x, y \in X$ *com* $x \neq y$, *existem vizinhanças* $U_x \ni x, U_y \ni y$ *satisfazendo* $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Exercício 5. *Mostre que a topologia gerada por* $\mathcal{B}$ *de fato é uma topologia em* X *e que* $\mathcal{B}$ *é uma base para a topologia gerada por* $\mathcal{B}$.

Exemplo. Dado $x = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, denote por $\|x\|$ a norma euclidiana padrão de $\mathbb{R}^n$ e por $B_\varepsilon(x) \doteq \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x-y\| < \varepsilon\}$ a bola de centro x e raio ε. A coleção $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0\}$ gera uma topologia em $\mathbb{R}^n$ denominada de topologia padrão em $\mathbb{R}^n$.

Exercício 6. *Prove que todo aberto de $\mathbb{R}^n$ se escreve como uma união de bolas abertas de raios racionais com centros que possuem todas coordenadas racionais. Conclua que $\mathbb{R}^n$ tem uma base enumerável que gera a mesma topologia do exemplo anterior.*

Exercício 7. *Mostre que se $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $a \in U$, então existe $\delta > 0$ tal que todo $v \in \mathbb{R}^n$ com $\|v\| < \delta$ satisfaz $a + v \in U$ e o segmento de reta (aberto ou fechado) $(a - \delta v, a + \delta v)$ permanece em U.*

Definição 5. *Seja X um espaço topológico. Diremos que X é conexo quando os únicos abertos de X que possuem complementar também aberto são X e $\emptyset$. Equivalentemente, X é dito conexo quando $X = U \cup V$ (com $U, V \in \tau_X$) implica que U ou V são vazios.*

Exercício 8. *Prove a equivalência afirmada na definição anterior.*

Exercício 9. *Seja X um espaço topológico e $x \in X$. A componente conexa de x, que chamaremos de C_x, é definida como a união de todos os subconjuntos conexos de X que contém x. Mostre que*

1. *C_x é conexo e é o maior (no sentido de inclusão) subconjunto conexo de X contendo X*
2. *Quaisquer duas componentes conexas associadas a dois pontos ou coincidem ou são disjuntas*
3. *A relação $x \sim y \iff y \in C_x$ é uma relação de equivalência. Determine as suas classes.*

Definição 6. *Seja X um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que A é compacto quando toda cobertura aberta de A (i.e, um subconjunto $\mathcal{C}$ de τ_A tal que $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = A$) admite uma subcobertura finita (ou seja, um subconjunto finito de $\mathcal{C}$ que ainda é uma cobertura aberta).*

Exercício 10. *Mostre o teorema do valor intermediário e o teorema de Weierstrass: toda função real contínua com domínio compacto assume (pelo menos) um máximo e um mínimo.*

Precisamos falar também do produto (finito) de espaços topológicos.

Definição 7. *Se $X_1, \cdots, X_k$ são espaços topológicos, a coleção de todos os subconjuntos do produto $\prod_{i=1}^{k} X_i$ da forma $\prod_{i=1}^{k} U_i$ (onde cada U_i é aberto em X_i) forma uma base para uma* *topologia em* $\prod_{i=1}^{k} X_i$*, que é chamada de topologia produto. De agora em diante, sempre que trabalharmos com um espaço produto essa é a topologia que estaremos considerando.*

Verifica-se facilmente que a topologia produto satisfaz propriedades razóaveis: uma função entre um espaço topológico e um espaço produto (de finitos fatores) é continua se e só se suas funções coordenadas são contínuas, o produto de espaços de Hausdorff é sempre Hausdorff, o produto de bases é uma base, o produto finito de espaços de base enumerável possui base enumerável, o produto de espaços conexos (resp. compactos) é conexo, e por aí vai. Caso você não tenha verificado essas propriedades ainda, é recomendável que o faça.

Observação. É "fácil" diferenciar funções entre espaços euclidianos: além deles possuirem uma estrutura de espaço topológico, possuem uma estrutura de espaço vetorial que é inteiramente compatível com sua topologia. Em geral a nossa vida não é tão fácil assim: somar e subtrair (que é essencial para definirmos a diferenciabilidade em espaços euclidianos) é algo totalmente sem sentido em espaços topológicos arbitrários - nesse caso não podemos falar de linearidade.

Mas medir a taxa com que as coisas variam (ou seja, estudar diferenciabilidade) é essencial a qualquer aplicação da matemática e com certeza não é algo que queremos perder. É aí que entra a geometria diferencial: um dos nossos objetivos será definir espaços topológicos especiais, onde irá fazer sentido diferenciar funções. Naturalmente, esses espaços especiais - que chamaremos de variedades diferenciáveis - deverão incluir abertos de espaços vetoriais como casos particulares e simultaneamente não serem "malucos" demais, de forma que os espaços topológicos que encontrarmos naturalmente sejam variedades diferenciáveis (seja lá o que isso irá querer dizer). Antes disso, relembremos bem como é a vida boa dos espaços euclidianos.

1.2 Diferenciabilidade de funções de várias variáveis

Denotaremos as coordenadas em $\mathbb{R}^n$ por $x^1, \cdots, x^n$ e escreveremos $p = (p^1, p^2, \cdots, p^n) \in U$ para denotar um ponto de um aberto U de $\mathbb{R}^n$. Se $0 < k \in \mathbb{Z}$, dizemos que uma função $f : U \to \mathbb{R}$ é C^k em p (fato que denotamos por $f \in C^k_p(U)$) quando existem e são contínuas em p as derivadas parciais

$$\frac{\partial^j f}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_j}}$$

seja qual forem $j \in \{1, \cdots, k\}, i_1, \cdots, i_j \in \{1, \cdots, n\}$. Se acontecer de f ser C^k em p seja qual for $0 \le k \in \mathbb{Z}$ diremos que f é C^∞ em p, ou, equivalentemente, $f \in C^\infty_p(U)$. Estendendo essa definição para funções $f : U \to V \subset \mathbb{R}^m$, diremos que $f \in C^k_p(U)$ quando $f^1, \cdots, f^m \in C^k_p(U)$ (onde $f^1, \cdots, f^m$ são as funções coordenadas de f, i.e, $f(p) = (f^1(p), \cdots, f^m(p)))$. Finalmente, se f é C^k em todo $p \in U$, dizemos simplesmente que $f \in C^\infty(U)$. Lembremos agora o que significa a diferenciabilidade de f e de quais propriedades a sua derivada $f' = \mathrm{d}f : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ goza.

Definição 8. *Uma função contínua* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$ *é dita diferenciável em* $p \in U$ *quando existe uma transformação linear* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *(ou seja, uma matriz* m *por* n*) tal que:*

$$\lim_{u \to 0} \frac{|f(p+u) - f(p) - Tu|}{|u|} = 0$$

Denotamos T *por* $\mathrm{d}f_p$.

Exercício 11. *Para cada $k \in \mathbb{N}$, construa uma função que é C^k mas não C^{k+1}.*

Exercício 12. *Prove que a matriz de $\mathrm{d}f_p$ é dada por*

$$\mathrm{d}f_p = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1}(p) & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f^m}{\partial x^1}(p) & \cdots & \dfrac{\partial f^m}{\partial x^n}(p) \end{pmatrix}$$

Conclua que $\mathrm{d}f_p$ está bem definida (ou seja, é única).

Exercício 13. *Prove que $\mathrm{d}f = f$ sempre que f é linear.*

Observação. A matriz acima geralmente é chamada de *matriz jacobiana* de f no ponto p, e sua determinante de *determinante jacobiana* de f no ponto p.

Exercício 14.

- *Pela maneira como foi construída, $\mathrm{d}f_p$ é linear e no item seguinte lhe é pedido que prove que essa definição coincide com a usual quando $n = m = 1$. Um erro comum é pensar: "ora, considere a função $t \mapsto t^3$, por exemplo - sua derivada é $t \mapsto 3t^2$, que evidentemente não é linear, então as noções não podem coincidir!" Explique porque esse raciocínio está errado.*
- *Dê sentido à definição acima quando $n = m = 1$, explicando como a mesma coincide com a definição de diferenciabilidade que você conhece de Cálculo 1.*
- *Mostre que diferenciabilidade é um fenômeno local: isso é, se U' é outra vizinhança de p e V' é outra vizinhança de $f(p)$, então uma função $g : U' \to V'$ que coincide com f numa vizinhança de p (ou seja, existe $\delta > 0$ tal que $f|_{B_\delta(p)} = g|_{B_\delta(p)}$) é diferenciável em p se e só se f o é, e, além disso, suas derivadas em p coincidem (ou seja, $\mathrm{d}g_p = \mathrm{d}f_p$).*

Exercício 15. *Suponha que U, V sejam abertos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente, e sejam $f : U \to V$, $g : V \to \mathbb{R}^\ell$ diferenciáveis. Demonstre e dê sentido às igualdades*

$$(g \circ f)'(p) = \mathrm{d}(g \circ f)_p = \mathrm{d}g_{f(p)} \circ \mathrm{d}f_p$$

$$\frac{\partial (g^i \circ f)}{\partial x^j}(p) = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial g^i}{\partial y^r}(f(p)) \frac{\partial f^r}{\partial x^j}(p), \text{ seja qual for } (i,j) \in \{1, \cdots, \ell\} \times \{1, \cdots, n\}$$

Como caso particular, prove que para qualquer caminho $\lambda : (-\delta, \delta) \to U$ de classe C^∞ tal que $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$, vale $\mathrm{d}f_p(v) = (f \circ \lambda)'(0)$ (onde $v \in \mathbb{R}^n$ é arbitrário).

1.3 Noções topológicas e diferenciáveis de equivalência

Em toda área da matemática buscamos distinguir os nossos objetos de estudo a menos de uma certa noção de equivalência relevante (na verdade, pode-se argumentar que isso é essencialmente tudo que matemáticos fazem...). Em topologia e análise não poderia ser diferente: dois espaços topológicos X e Y serão ditos homeomorfos quando existe uma função contínua e bijetora $F : X \to Y$ com inversa contínua cuja inversa F^{-1} também é contínua, e dois abertos $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ serão ditos difeomorfos quando existe uma função $F : U \to V$ diferenciável que é um homeomorfismo com inversa também diferenciável. Nesses casos, chamamos F de (respectivamente) um homeomorfismo/difeomorfismo.

Exercício 16. *Seja $f : X \to Y$ um homeomorfismo e $U \subset X$ um aberto. Mostre que $f(U)$ é aberto em Y e que U é homeomorfo a $f(U)$.*

Exercício 17. *Sejam X e Y espaços topológicos homeomorfos. Mostre que X é compacto (resp. conexo) se, e somente se, Y o é.*

Exercício 18. *Mostre que se $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ são dois abertos difeomorfos via alguma F, então $n = m$ e, além disso, $\mathrm{d}F_p$ é um isomorfismo seja qual for $p \in U$.*

Exercício 19. *Mostre que toda composição finita de difeomorfismos (resp. homeomorfismos) ainda é um difeomorfismo (resp. homeomorfismo).*

Exercício 20. *Sejam X e Y espaços topológicos arbitrários e $f : X \to Y$ uma função bijetora. Exiba topologias em X e Y que os tornem homeomorfos.*

Exercício 21. *Mostre que translações e dilatações são homeomorfismos, i.e: sejam qual forem $A \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda \neq 0$ e $p \in \mathbb{R}^n$, A é homeomorfo a $\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$ e a $A + p = \{a + p \mid a \in A\}$.*

Exercício 22. *Mostre que os espaços topológicos* (A, τ_A) *e* (B, τ_B) *são homeomorfos, onde*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

e

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} = 1\}$$

Reflita: A e B são difeomorfos?

Exercício 23. *Mostre que qualquer bola aberta de* $\mathbb{R}^n$ *é difeomorfa ao próprio* $\mathbb{R}^n$*.*

Exercício 24. *Mostre que se* $f : X \to Y$ *é contínua, então* $G \doteq \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ *é homeomorfo a* X*.*

Exercício 25. *Mostre que qualquer cilindro diferenciável em* $\mathbb{R}^3$ *(i.e, qualquer subconjunto de* $\mathbb{R}^3$ *difeomorfo a* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$*) é difeomorfo a* $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ *(onde* $p \in \mathbb{R}^2$ *é arbitrário), mas* $\mathbb{R}^2$ *não é homeomorfo a nenhum cilindro diferenciável.*

Exercício 26. *Mostre que qualquer cone diferenciável em* $\mathbb{R}^3$ *(i.e, qualquer subconjunto de* $\mathbb{R}^3$ *difeomorfo a* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$*) não é difeomorfo a* $\mathbb{R}^2$*.*

As definições acima garantem que não haja nenhuma propriedade topológica (resp. diferenciável) que dois espaços homeomorfos (resp. difeomorfos) não compartilhem simultaneamente.

1.4 Os teoremas locais mais importantes

Os dois teoremas a seguir nos dizem (sob hipóteses razoavelmente relaxadas) o comportamento local de funções diferenciáveis em termos de suas derivadas. Mais importantemente, eles essencialmente confirmam a nossa intuição de como são as funções diferenciáveis em escala pequena. Suas demonstrações não serão apresentadas aqui (basta consultar qualquer livro bom de análise), mas convém ressaltar que elas caem na famosa classe do "você precisa ter visto e entendido isso aqui pelo menos uma vez na sua vida".

Teorema 1.1 (Teorema da função inversa). *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abertos e $F : U \to V$ diferenciável. Se $\mathrm{d}F_a$ é um isomorfismo em algum ponto $a \in U$, então existem vizinhanças conexas $a \in U_0 \subset U$ e $F(a) \in V_0 \subset V$ tal que $F|_{U_0} : U_0 \to V_0$ é um difeomorfismo.*

Teorema 1.2 (Teorema da aplicação implícita). *Seja $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ aberto e denotemos por $(x, y) = (x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^k)$ as coordenadas padrões em U. Suponha ainda que $\phi : U \to \mathbb{R}^k$ é diferenciável, $(a, b) \in U$ e $c \doteq \phi(a, b)$. Se a matriz k por k*

$$\left(\frac{\partial \phi^i}{\partial y^j}(a, b)\right)$$

for invertível, então existem vizinhanças $a \in V_0 \subset \mathbb{R}^n$, $b \in W_0 \subset \mathbb{R}^k$ de b e uma função diferenciável $F : V_0 \to W_0$ tal que $\phi^{-1}(c) \cap (V_0 \times W_0)$ é o gráfico de F, i.e, $\phi(x, y) = c$ com $(x, y) \in V_0 \times W_0$ acontece se, e somente se, $y = F(x)$.

Observação. Os dois teoremas acima são, na verdade, um só (ou seja, tendo um é possível provar o outro e vice-versa).

Exercício 27. *Suponha que $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $F : U \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável com determinante jacobiano não nulo em todo ponto de U. Prove que F manda abertos (de U) em abertos (de $\mathbb{R}^n$), e que se F é injetiva, também é um difeomorfismo sobre sua imagem.*

Exercício 28. *Mostre que a restrição da aplicação F definida por*

$$(0, \infty) \times \mathbb{R} \ni (r, \theta) \mapsto F(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)) \in \mathbb{R}^2$$

a qualquer subconjunto aberto de seu domínio onde é injetiva é um difeomorfismo sobre sua imagem. Dê um exemplo de algum subconjunto assim.

Exercício 29. *Exatamente o mesmo exercício que o anterior, mas agora para a aplicação G definida por*

$$(0, \infty) \times (0, \pi) \times \mathbb{R} \ni (\rho, \varphi, \theta) \mapsto G(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi) \in \mathbb{R}^3$$

1.5 A notação de Einstein

Daqui em diante, adotaremos a convenção de Einstein ao lidar com somatórios. A mesma consiste, essencialmente, em sumir com os símbolos de somatórios e fazer um acordo de quando certos índices estão sendo somados ou não e deduzir de maneira óbvia até o onde o somatório implícito vai. Mais explicitamente, todos os símbolos de somatórios são omitidos, com o entendimento comum de que se um mesmo índice aparece numa expressão monomial uma vez em baixo e outra em cima, na verdade estamos somando a expressão sob tal índice. Por exemplo:

- $v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i$ ou $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e^i$ viram simplesmente $v = v^i e_i$, $f = f_i e^i$
- Convencionamos que se um índice aparece no denominador de uma expressão, ele está sempre em baixo, tornando completamente consistente escrever
$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}$$
ao invés de
$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}$$
- Deve-se tomar cuidado com índices "mudos" quando fazemos substituições. Por exemplo, se $p^i = a^i_j v^j$ e $v^j = b^j_i w^i$, não é correto escrever $p^i = a^i_j b^j_i w^i$ (na verdade essa expressão não é nem consistente com a nossa notação). O correto seria perceber que em $v^j = b^j_i w^i$, o índice i é mudo, então poderíamos escrever $v^j = b^j_k w^k$ e substituir $p^i = a^i_j b^j_k w^k$.
- Definimos $\delta^j_i = \delta^j_i = \delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

No momento essa notação pode parecer difícil de acostumar e mais preguiça do que algo de fato necessário, mas acredite: ela compensa (e muuuito - talvez não agora, mas é importante enraizar bons hábitos). As expressões ficam bem menos carregadas e é uma notação autocorretora fácil de lembrar que praticamente se escreve sozinha. Ela nos salva de ter que escrever aberrações como:

$$R = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} R^{\ell}_{ijk} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k \otimes \partial_\ell$$

que trocamos por simplesmente

$$R = R^{\ell}_{ijk} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k \otimes \partial_\ell$$

O "preço" que temos de pagar para essa convenção funcionar é pequeno: a escolha de escrever um índice em cima ou em baixo *não* é arbitrária. Feitas essas considerações necessárias, passemos a mais alguns exemplos:

Exemplo. Denotemos por $V \doteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ o espaço das transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$. Mostraremos que

$$\mathcal{B} = \{\pi_{ij} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \mid \pi_{ij}(e_i) = e_j \text{ e } \pi_{ij}(e_k) = 0 \text{ para todo } k \neq i\}$$

é uma base de V usando a notação de Einstein. De fato, se $a^{lt} \in \mathbb{R}$ são tais que $a^{lt}\pi_{lt} = 0$, em particular teremos

$$a^{lt}\pi_{lt}(e_s) = a^{lt}\delta_{sl}e_t = 0$$

seja qual for $s \in \{1, \cdots, n\}$ (onde definimos $\delta_{sl} = 1$ se $s = l$ e $\delta_{sl} = 0$ caso contrário e $\{e_i\}$ nesse caso denota a base canônica). Em particular, como $\{e_t\}_{1 \leq t \leq m}$ é uma base de $\mathbb{R}^m$, temos

$$a^{lt}\delta_{sl} = a^{st} = 0$$

seja qual forem $l \in \{1, \cdots, n\}$ e $s \in \{1, \cdots, n\}$, $t \in \{1, \cdots m\}$, mostrando que $\mathcal{B}$ é linearmente independente. Agora, denotando por $\mathrm{d}w^t$ a aplicação $\mathbb{R}^m \ni v = v^i e_i \mapsto \mathrm{d}w^t(v) = v^t$, temos

$$\begin{aligned} T(y) = T(y^i e_i) &= y^i T(e_i) \\ &= y^i \mathrm{d}w^t(Te_i)e_t \\ &= \mathrm{d}w^t(Te_i)\pi_t^i(y) \end{aligned}$$

sejam qual forem $T \in V$ e $y \in \mathbb{R}^n$, mostrando que qualquer $T \in V$ se escreve como

$$T = c^{it}\pi_{it}$$

onde as constantes dependem de T. Isso prova que $\mathcal{B}$ gera V.

Exemplo. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita n munido de um produto interno g e $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base **arbitrária** de V. Mostraremos que todo $v \in V$ é inteiramente determinado pelos valores $\{g(v, e_i)\}_{1 \leq i \leq n}$. Note que como todo $v \in V$ é inteiramente determinado pelos seus componentes na base $\{e_i\}_{i=1}^n$, basta encontrarmos uma expressão para estes em termos de $\{g(v, e_i)\}_{1 \leq i \leq n}$. Primeiramente, denotando $g_{ij} \doteq g(e_i, e_j)$ e por g^{ij} os coeficientes da matriz inversa de $\tilde{g} = (g_{ij})$ (que está bem definida, pois $\tilde{g}v = 0 \iff v = 0$), observe que vale a igualdade

$$g(v, e_k) = g(v^i e_i, e_k) = v^i g_{ki}$$

E portanto

$$g^{kt} g(v, e_k) = v^i g_{ki} g^{kt} = v^i \delta_{it} = v^t$$

como desejado. Esse processo é inteiramente reversível. De fato, sabendo que $g^{ls} g(v, e_\ell) = v^s$, recuperamos

$$\begin{aligned} g^{\ell s} g_{sm} g(v, e_\ell) = \delta_m^\ell g(v, e_\ell) &= g(v, e_m) \\ &= v^s g_{sm} \end{aligned}$$

Exercício 30. *Refaça os dois exemplos anteriores, mas agora explicitando* ***todos*** *os somatórios, índices e quais conjuntos os mesmos percorrem. Além disso, justifique todas as igualdades usadas.*

2 Variedades diferenciáveis

Embora o intuito dessa brevíssima introdução seja esclarecer um assunto que deveria ser quase que de conhecimento geral, é impossível motivar como variedades entraram definitivamente na nossa vida sem falar de geometria. A discussão que apresentamos a seguir tenta explicar porque variedades não são só úteis, mas além disso, *necessárias* em certo sentido, e é importante (por motivos óbvios) ressaltar que grande parte da mesma aparece quase que *verbatim* também em [2].

2.1 Porque precisamos de variedades?

Por muuuito tempo a (falsa) ideia de que a geometria Euclidiana modela com completa fidelidade o nosso universo perdurou na mente de vários gigantes. Convém inserirmos agora um parágrafo eloquentemente elaborado pelo fantástico físico e matemático Roger Penrose em [3]:

> O fato de que a geometria Euclidiana parece refletir tão precisamente a estrutura do “espaço” de nosso mundo tem nos enganado (ou, pelo menos, nossos ancestrais!) a pensarmos que essa geometria é uma necessidade lógica, ou a pensarmos que nós temos *a priori* uma compreensão intuitiva inata de que a geometria Euclidiana *deve* se aplicar ao mundo em que vivemos (até mesmo o grande filósofo Immanuel Kant afirmou isso!). Nosso verdadeiro término com a geometria Euclidiana só veio com a relatividade geral de Einstein, que foi proposta muitos anos depois. Longe da geometria Euclidiana ser uma necessidade lógica, é um *fato empírico observacional* que essa geometria se aplique tão precisamente - apesar que não exatamente - à estrutura do nosso espaço físico! A geometria Euclidiana, foi, de fato, sempre uma teoría *física* incrível. Isso além de ser uma parte elegante e lógica da matemática pura.

A percepção de Kant foi frustrada: pouco tempo depois, os primeiros problemas da geometria Euclidiana foram descobertos na mente de Gauss. Logo após, Riemann inaugurou as fundações essenciais da área que hoje conhecemos como *geometria Riemanniana* e generaliza fortemente todo o trabalho de Gauss e seus antecessores. Alguns 100 anos depois, Einstein (usando de maneira crucial o trabalho de Riemann) mostrou que nosso universo é de fato não-Euclidiano (por exemplo, onde há grande concentrações de massa - como em buracos negros -, isso é bem mais notável) - entre outras coisas, sua teoria descreve a curvatura e geometria de pequenas regiões espaciais em termos de quanta matéria e energia as mesmas contêm. Mas o que realmente significa curvatura de uma perspectiva intrínseca? Porque a geometria Euclidiana não é geral o suficiente? Essas perguntas, mais filósoficas do que matemáticas, foram as faíscas essenciais para que as variedades entrassem de vez na nossa história. Relembremos agora um postulado muito polêmico de Euclides, que começou todo esse “tumulto”:

O quinto postulado. *Se uma reta intersecta outra duas retas fazendo dois ângulos interiores no mesmo lado que somam menos que dois ângulos retos, então as duas retas, quando estendidas indefinidamente, se encontram naquele lado em que os ângulos somam menos do que dois ângulos retos.*

Pelo fim do século 18, a estrutura da geometria Eucliana ainda era obscura. Apesar de muitas pessoas (talvez até Euclides) terem acreditado que o quinto postulado de Euclides era uma consequência dos quatro outros, possivelmente com algum postulado adicional que seria mais simples e elegante, ninguém tinha conseguido achar algum candidato a postulado adicional assim. O desconforto com o quinto postulado surge de sua complexidade em contraste aos outros, e também porque não se pode verificá-lo (ou mesmo testar sua precisão aproximada) por medições físicas diretas, já que o ponto onde as duas retas se encontram poderia escapar dos limites da sua folha de papel.

Em 1817, Gauss já tinha se convencido de que deveriam existir outras geometrias satisfazendo os primeiros quatro postulados de Euclides (e, claro, satisfazendo também as noções comuns), mas não o quinto. Ele não publicou suas ideias. Um motivo para sua reticência é bem plausível: Gauss não conseguiu definir claramente sua nova geometria, e ele frequentemente se descrevia em cartas para amigos como um “perfeccionista”. Também por esse motivo ele atrasou por anos a publicação de suas contribuições à teoria de superfícies.

Várias construções parciais de geometrias não-Euclidianas aparecem tão cedo quanto 1829: nos trabalhos de Lobachevski, seguidos por um trabalho de Bolyai. Elas satisfaziam os primeiros quatro postulados, mas não o quinto: porém, as mesmas não tinham fundação matemática sólida. A construção correta de geometria não-Euclidiana exige abstração, já que (como vemos num bom curso de geometria diferencial clássica e Hilbert demonstrou), não existem candidatos para qualquer geometria assim dentro do espaço Euclidiano: essa é a nossa primeira motivação para geometria Riemanniana (e, claro, variedades diferenciáveis antes).

Além disso, mesmo que você entenda superfícies em $\mathbb{R}^3$ muito bem, há muitos motivos para trabalhar em dimensões 3, 4, etc. Como, por exemplo, para tratar o tempo como uma coordenada adicional, ou para investigr o espaço de retas, o espaço de círculos, o espaço de esferas e etc. Não há limite no número de parâmetros, i.e dimensões, precisos para descrever conjuntos de objetos geométricos. Mesmo que exista algum método elementar que consiga colocar algum objeto geométrico assim em algum espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, tal mergulho pode não ser geometricamente equivariante, i.e pode acontecer que simetrias do conjunto geométrico não se estendam a simetrias do espaço Euclidiano.

Tais situações aparecem, por exemplo, na mecânica clássica. Comece com a noção de um corpo rígido. Ele tem seis parâmetros: três para a localização do centro de gravidade, e três para dizer como o corpo foi rotacionado em torno daquele centro. Você pode até conseguir evitar ter que trabalhar em um espaço euclidiano de dimensão 6, já que o centro de gravidade mora num espaço Euclidiano tridimensional, mas o que é o conjunto de rotações, como um objeto tridimensional? Como podemos explorar geometria ali? O leitor que tiver lutado com livros de mecânica pode ter sofrido com os *ângulos de Euler*, e para tal leitor, essa pergunta não é supérflua. Nós gostariamos de ter uma teoria mais geral para lidar com essas perguntas, na qual os movimentos do corpo rígido serão curvas com significado geométrico.

Mais geralmente, precisamos definir o conjunto de posições de um objeto mecânico, como um múltiplo pêndulo, e ver o que são as trajetórias desse objeto, como curvas daquele conjunto. Para um pêndulo duplo, é possível mostrar que o espaço de tais posições é uma superfície - de fato, um toro -, mas que os movimentos do pêndulo não correspondem a geodésicas do toro para nenhum toro de $\mathbb{R}^3$: elas só serão geodésicas para uma variedade diferenciável munida de uma geometria Riemanniana abstrata.

Em mecânica estatística, físicos consideram sistemas de N partículas, com N grande. O espaço de suas posições tem dimensão $3N$, e para carregar informação completa sobre seus movimentos, precisa-se saber suas posições e velocidades, donde surge um *espaço fase* de dimensão $6N$ - que não é simplesmente $\mathbb{R}^{6N}$, devido a colisões. Portanto nosso terceiro motivo para abstração é que nós já estamos familiares com a manipulação de tais espaços abstratos, e tentando fingir que não estávamos (i.e tentando parametrizá-los).

Hilbert mostrou que nenhuma superfície completa imersa em $\mathbb{R}^3$ pode ter curvatura negativa gaussiana constante, e isso nos diz que a geometria Riemanniana abstrata de superfícies, em geral, só pode ser representada localmente, e mesmo assim somente sujeito a alguma hipótese de não degenericidade, em $\mathbb{R}^3$. O programa da geometria Riemanniana abstrata recebeu duas investidas decisivas, a primeira por Gauss em 1827, e a segunda por Riemann em 1854. Essencialmente, Gauss concebeu o conceito de métrica intrínseca de uma superfície em $\mathbb{R}^3$, e então percebeu que a *primeira forma fundamental* de uma superfície (o produto interno Euclidiano restrito a seus espaços tangentes) e a geometria intrínseca da superfície (i.e, a métrica obtida ao medir distâncias *somente* dentro da superfície, sem nunca sair dela) determinam uma à outra.

Riemann fez duas inovações simultâneas: primeiro, ele definiu (não muito rigorosamente) uma variedade diferenciável como qualquer conjunto de qualquer dimensão n, onde se pode fazer cálculo diferencial, mudar coordenadas, etc. Em particular, conseguimos curvas diferenciáveis, vetores tangentes (velocidades) de tais curvas, e um espaço tangente em cada ponto (i.e todas as velocidades possíveis de quaisquer curvas passando por aquele ponto). Ele então pediu que uma geometria numa variedade seja simplesmente uma forma quadrática positiva definida arbitrária em cada um desses espaços tangentes, pensada como um análogo da primeira forma fundamental de Gauss. Poderia-se então usar a mesma expressão para definir comprimentos de curvas, procurar as curvas de menor distância entre dois pontos, etc.

Nesse minicurso, não nos preocuparemos com a imensa tarefa de como definir as propriedades de tal geometria abstrata: isso envolve procurar por invariantes geométricos que generalizem os invariantes de Gauss, a curvatura gaussiana, e extensões dos resultados de Gauss (Riemann conseguiu encontrar o invariante certo - conhecido hoje como o *tensor de curvatura de Riemann*). Ferramentas técnicas como transporte paralelo e cálculo diferencial absoluto foram desenvolvidas no final do século 19, culminando no trabalho da escola Italiana de Ricci e Levi-Civita, mas o conceito subjacente de variedade só foi definitivamente entendido por Whitney em 1936.

Ao invés disso, trataremos (de maneira muito breve) somente do absoluto essencial para que se consiga de fato generalizar a geometria diferencial clássica que conhecemos de $\mathbb{R}^3$ para espaços topológicos (suficientemente bem comportados numa maneira que deixaremos preciso adiante) gerais num futuro próximo. Isso envolve, entre uma *variedade* (rs) de outras coisas, explicar como generalizar os conceitos de superfície diferencial, vetores tangentes, orientação de superfícies, campos vetoriais e suas variações, etc., para tais espaços.

2.2 Quem são exatamente as variedades?

Da nossa experiência no $\mathbb{R}^3$ já estamos familiares com várias superfícies: esferas, cilindros, toros, planos, etc. Desde sempre pensamos nesses espaços de maneira extrínseca: como subconjuntos que vivem em um *espaço ambiente* maior, nesse caso um espaço euclidiano tridimensional. Por outro lado, podemos pensar em superfícies por outro ponto de vista *intrínseco*: vendo localmente como a superfície se comporta em pontos distintos, mas sem introduzir nenhum espaço externo (por exemplo, faz perfeito sentido falar da garrafa de Klein como uma superfície abstrata intrínseca, mas ela não pode ser vista extrinsecamente no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ - só em $\mathbb{R}^4$). No final das contas os dois pontos de vista são essencialmente equivalentes, mas por vários motivos geralmente é mais fácil (e interessante!) adotar a perspectiva íntrinseca. Em certas situações, como na teoria da relatividade de Einstein, a perspectiva extrínseca não faz sentido algum, pois não há qualquer sentido físico em "ver o universo de uma perspectiva extrínseca".

Um bom exemplo de uma superfície é a superfície da Terra. Extrinsecamente, ela pode ser (ingenuamente) vista como um subespaço do espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$. Mas ela também pode ser vista intrisecamente como uma superfície bidimensional por meio de um *atlas*: uma coleção de *mapas* ou *cartas* que descrevem várias regiões da superfície ao identificá-las com um subconjunto de um plano bidimensional. Desde que tenhamos cartas suficientes para cobrir a superfície original, o atlas resultante é suficiente para descrever a superfície. É claro que mesmo essa perspectiva não é completamente intrínseca (na verdade, abordagens livres de coordenadas *a la Cartan* são bem mais elegantes, mas isso é outro assunto), uma vez que há (bem) mais de um atlas que pode ser associado à superfície de Terra, e todos eles podem diferir[1] de maneira significativa ou não. Mas há vários fatos que podem ser deduzidos com um atlas que não dependem do atlas específico escolhido: por exemplo, usando qualquer atlas preciso da Terra podemos ver que não dá pra ir de Brasília a Lisboa sem cruzar pelo menos um oceano. É *nesse* tipo de propriedade *intrínseca* ou *livre de coordenadas* que estaremos interessados em estudar. Quando formos definir diferenciabilidade, por exemplo, usaremos coordenadas, mas teremos de provar que nossa definição é de fato livre de coordenadas. Esse tipo de situação já lhe deve ser familiar caso tenha estudado geometria diferencial clássica de superfícies.

Gauss, no seu fantástico trabalho *Disquisitiones generales circa superficies curvas* ("Investigações Gerais de Superfícies curvadas") foi o primeiro a adotar uma perspectiva intrínseca no estudo de superfícies, usando livremente coordenadas locais (e portanto já tinha a noção de cartas) - tratando superfícies como espaços abstratos que existem por si próprios, independentemente de qualquer espaço Euclidiano externo.

Seu aluno, Riemann, na próvavel mais influente palestra dos últimos séculos (que conseguiu maravilhar até o próprio Gauss) *Uber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* ("Sobre as hipóteses em que a geometria é fundada"), montou o alicerce da geometria diferencial generalizada a dimensões quaisquer - hoje conhecida como *geometria Riemanniana*. Na verdade, a própria palavra "variedade" é uma tradução do inglês "manifold", que por sua vez é uma tradução da palavra alemâ "Mannigfaltigkeit", que Riemann usou para descrever seus objetos de estudo.

Feitas essas considerações, vejamos agora o que precisamente significa um espaço topólogico ser localmente Euclidiano antes de definirmos variedades.

2.2.1 Variedades topológicas

Definição 9. *Um espaço topológico $\mathcal{M}$ é localmente Euclidiano de dimensão n se todo $p \in \mathcal{M}$ possui uma vizinhança $U_p \in \mathcal{M}$ que é homeomorfa a um aberto V_p de $\mathbb{R}^n$.*

Terminologia. *Se $p \in \mathcal{M}$, $U \ni p$ é uma vizinhança de p e $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo, dizemos que φ é uma carta ou um sistema de coordenadas em torno de p.*

Exercício 31. *Usando o exercício 23, mostre que essa definição é inalterada ao substituirmos "um aberto V_p" por "uma bola aberta B_p" ou pelo próprio $\mathbb{R}^n$ (ou seja, $V_p = \mathbb{R}^n$).*

[1] Mas devido ao teorema Egregium todos eles têm uma coisa em comum: nenhum deles é completamente fiel - sempre vão distorcer ângulos ou áreas ou outra propriedade geométrica.

Com isso, podemos finalmente definir o que é uma *variedade topológica.*

Definição 10. *Uma variedade topológica de dimensão n é um espaço topológico $(\mathcal{M}, \tau)$ com base enumerável, Hausdorff e localmente euclidiano de dimensão n.*

Observação. Embora possa parecer inicialmente que ser localmente Euclidiano, Hausdorff e ter base enumerável estejam relacionados, isso *não* é verdade! Acontece que essas três condições são inteiramente independentes.

Observação. Veremos agora que a dimensão de uma variedade topológica conexa é de fato bem definida (i.e, uma variedade topológica conexa não pode ter dimensões m e n ao mesmo tempo se $m \neq n$): isso se deve ao fato chamado *invariância da dimensão* - dois abertos Euclidianos de dimensões diferentes nunca são homeomorfos. Esse resultado não é trivial e sua demonstração foge do escopo desse material, portanto será usado aqui livremente.

De fato, seja $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade topológica conexa de dimensão n e consideremos nela a relação de equivalência $\sim$, onde $p \sim q$ se existem cartas em torno de ambos com imagens no mesmo $\mathbb{R}^n$ (note que as cartas não precisam ser as mesmas aqui, só estamos pedindo que as imagens das cartas tenham a mesma dimensão). É claro que $\sim$ é realmente uma relação de equivalência. Além disso, seja qual for $p \in \mathcal{M}$, por definição existe uma carta em torno de p que cai em $\mathbb{R}^n$, e a classe de equivalência $[p] = \{q \in \mathcal{M} \mid \text{existe uma carta } \varphi_q : U_q \to \mathbb{R}^n\}$ é aberta (é fácil ver que $[p]$ é a união dos U_q acima, que são por definição abertos). Por conexidade, a partição associada a essa relação de equivalência consiste de uma só classe. E como dois abertos de dimensões diferentes não podem ser homeomorfos, é claro que todas as cartas só caem em $\mathbb{R}^n$, que é o que queríamos provar.

O que acabamos de fazer mostra que a dimensão topológica de uma variedade é uma de suas propriedades *intrínsecas.* Convém observamos também que a nossa definição *nasce* excluindo "bizarrices" como a união disjunta de um plano e uma reta, por exemplo: não dá pra ter dimensões diferentes em pontos diferentes. É óbvio também que nessas circunstâncias o conjunto vazio pode ser considerado como uma variedade n-dimensional para qualquer n. Outra pergunta interessante que pode ser feita é a seguinte: estamos "ganhando" mais espaços com essa definição? Existem variedades que não são simplesmente subconjuntos razoavelmente bem comportados de $\mathbb{R}^n$ para algum n suficientemente grande? A resposta, por bem ou mal, é que não: toda variedade topológica, de qualquer dimensão, é homeomorfa a algum subconjunto de algum $\mathbb{R}^n$. Isso também vale para variedades diferenciáveis e Riemannianas, substituindo homeomorfismos por difeomorfismos e isometrias, respectivamente (veja os teoremas de Whitney e do mergulho de Nash).

Exercício 32. *Mostre que todo subconjunto aberto de uma variedade topológica é também uma variedade topológica por si só.*

Exercício 33. *Mostre que $\mathbb{R}^n$ é uma variedade topológica seja qual for $n \in \mathbb{N}$.*

Exercício 34. *Seja X um espaço topológico, $x \in X$ arbitrário e seja U uma vizinhança de x. Se sempre existe um aberto V tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$ (sejam qual forem x e U), dizemos que X é regular. Mostre que toda variedade topológica é regular.*

Exercício 35. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que*

$$\operatorname{graf}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

é uma variedade topológica. Qual é a sua dimensão?

Exercício 36. *Se $p \in \mathcal{M}$ e φ é uma carta em torno de p, dizemos que φ é centrada em p se $\varphi(p) = 0$. Mostre que todo ponto de uma variedade possui uma carta centrada nele.*

Exercício 37. *Mostre que*

$$A = \{(x, 0] \mid x \in (-1, 0]\} \cup \{(x, x) \mid x \in (0, 1)\} \cup \{(x, -x) \mid x \in (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$$

não é uma variedade topológica com a topologia induzida de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo. A cruz

$$C = \{(x, 0) \mid x \in (-1, 1)\} \cup \{(0, x) \mid x \in (-1, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$$

não é uma variedade topológica com a topologia induzida de $\mathbb{R}^2$. Com efeito, suponhamos por absurdo que fosse: então existiria uma vizinhança de $p \doteq (0, 0)$, digamos U_p, que é homeomorfa a $B \doteq B(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$ (para algum $\varepsilon > 0$ e algum n) centrada em p. Essa carta induz um homeomorfismo óbvio entre $U_p \setminus \{p\}$ e $B \setminus \{0\}$. Mas $U_p \setminus \{p\}$ tem quatro componentes conexas enquanto que $B \setminus \{0\}$ ou é conexa (caso $n \geq 2$) ou tem duas componentes conexas (caso $n = 1$). Essa contradição mostra que C não é localmente Euclidiana em $(0, 0)$.

Exemplo. Seja $\mathbb{S}^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|v\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera n-dimensional, e denotemos por N o seu *polo norte* $(0, \cdots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, e por S o *polo sul* $(0, \cdots, 0, -1)$. É claro que $\mathbb{S}^n$ com a topologia induzida de $\mathbb{R}^n$ tem base enumerável e é Hausdorff, e como as projeções estereográficas:

$$\begin{aligned} \pi_N : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} &\to \mathbb{R}^n \\ (x^1, \cdots, x^n) &\mapsto \frac{(x^1, \cdots, x^n)}{1 - x^{n+1}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \pi_S : \mathbb{S}^n \setminus \{S\} &\to \mathbb{R}^n \\ (x^1, \cdots, x^n) &\mapsto \frac{(x^1, \cdots, x^n)}{1 + x^{n+1}} \end{aligned}$$

são homeomorfismos, segue que a esfera é uma variedade topológica.

Exercício 38. *Verifique que as funções inversas de π_N e π_S são dadas (respectivamente) por*

$$\mathbb{R}^n \ni (u^1, \cdots, u^n) \mapsto \left(\frac{2u^1}{\|u\|^2+1}, \cdots, \frac{2u^n}{\|u\|^2+1}, \frac{\|u\|^2-1}{\|u\|^2+1} \right) \in \mathbb{S}^n$$
$$\mathbb{R}^n \ni (u^1, \cdots, u^n) \mapsto \left(\frac{2u^1}{\|u\|^2+1}, \cdots, \frac{2u^n}{\|u\|^2+1}, \frac{\|u\|^2-1}{1-\|u\|^2} \right) \in \mathbb{S}^n$$

2.2.2 Variedades diferenciáveis

Observe que ainda não faz sentido algum falar de qualquer tipo de diferenciabilidade de funções entre variedades. Mas, como podemos identificar localmente vizinhanças de variedades topológicas com vizinhanças Euclidianas, é natural que tentemos definir diferenciabilidade nesse contexto tendo em mente as cartas, identificando localmente abertos da variedade com abertos euclidianos, onde sabemos nos virar.

Suponha que $(U, \phi : U \to \mathbb{R}^n)$ e $(V, \psi : V \to \mathbb{R}^n)$ são dois sistemas de coordenadas de uma variedade topológica. Como $U \cap V$ é aberto em U e $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo sobre um aberto de $\mathbb{R}^n$, a imagem $\phi(U \cap V)$ também é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Obviamente $\psi(U \cap V)$ também é um aberto de $\mathbb{R}^n$.

Definição 11. *Duas cartas $(U, \phi : U \to \mathbb{R}^n)$ e $(V, \psi : V \to \mathbb{R}^n)$ de uma variedade topológica são ditas $\mathcal{C}^\infty$-compatíveis quando as aplicações*

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V), \psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

são C^∞. Essas duas aplicações são chamadas funções de transição entre os dois sistemas de coordenadas.

Há uma teoria rica e complexa para variedades $\mathcal{C}^k$, mas é mais complicada e não tão comum de se estudar. Estaremos interessados aqui só em coisas $\mathcal{C}^\infty$, por isso, sempre que falarmos de diferenciabilidade, assuma $\mathcal{C}^\infty$ (a não ser, claro, que explicitamente mencionado o contrário).

Definição 12. *Um atlas $\mathcal{C}^\infty$ (compatível) ou simplesmente um atlas num espaço localmente Euclidiano $\mathcal{M}$ é uma coleção $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ de cartas dois a dois $\mathcal{C}^\infty$ compatíveis que cobrem $\mathcal{M}$, ou seja, que satisfazem $\mathcal{M} = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.*

Exemplo. O círculo unitário $\mathbb{S}^1$ no plano complexo $\mathbb{C}$ pode ser descrito como o conjunto de pontos $\{e^{it} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$. Sejam U_1 e U_2 os dois subconjuntos abertos de $\mathbb{S}^1$ definidos por

$$U_1 = \{e^{it} \in \mathbb{C} \mid -\pi < t < \pi\}$$
$$U_2 = \{e^{it} \in \mathbb{C} \mid 0 < t < 2\pi\}$$

E definamos $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$ para $\alpha \in \{1, 2\}$ por

$$\phi_1\left(e^{it}\right) = t, -\pi < t < \pi$$
$$\phi_2\left(e^{it}\right) = t, 0 < t < 2\pi$$

Como ϕ_1 e ϕ_2 são ramos do logarítmo complexo $z \mapsto \frac{1}{i}\log(z)$ e são homeomorfismos sobre suas respectivas imagens, segue que (U_1, ϕ_1) e (U_2, ϕ_2) são cartas em $\mathbb{S}^1$. A interseção $U_1 \cap U_2$ consiste de duas componentes conexas dadas por

$$\begin{aligned} A &= \{e^{it} \mid -\pi < t < 0\} \\ B &= \{e^{it} \mid 0 < t < \pi\} \end{aligned}$$

satisfazendo

$$\begin{aligned} \phi_1\left(U_1 \cap U_2\right) = \phi_1(A \cup B) = \phi_1(A) \cup \phi_1(B) = (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \\ \phi_2\left(U_1 \cap U_2\right) = \phi_2(A \cup B) = \phi_2(A) \cup \phi_2(B) = (\pi, 2\pi) \cup (0, \pi) \end{aligned}$$

onde as uniões acima são disjuntas. As funções de transições são das por

$$\left(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}\right)(t) = \begin{cases} t + 2\pi & \text{se } t \in (-\pi, 0) \\ t & \text{se } t \in (0, \pi) \end{cases}$$

e

$$\left(\phi_1 \circ \phi_2^{-1}\right)(t) = \begin{cases} t - 2\pi & \text{se } t \in (\pi, 2\pi) \\ t & \text{se } t \in (0, \pi) \end{cases}$$

Portanto (U_1, ϕ_1) e (U_2, ϕ_2) são cartas $\mathcal{C}^\infty$-compatíveis e constituem um atlas $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathbb{S}^1$.

Apesar da compatibilidade $\mathcal{C}^\infty$ ser claramente reflexiva e simétrica, ela não é transitiva. De fato, suponhamos que (U_1, ϕ_1) é $\mathcal{C}^\infty$-compatível com (U_2, ϕ_2) e que (U_2, ϕ_2) é $\mathcal{C}^\infty$-compatível com (U_3, ϕ_3). Note que essas 3 funções coordenadas são definidas simultaneamente definidas somente na interseção tripla $U_{123} = U_1 \cap U_2 \cap U_3$. Logo, a composição

$$\phi_3 \circ \phi_1^{-1} = (\phi_3 \circ \phi_2^{-1}) \circ (\phi_2 \circ \phi_1^{-1})$$

é $\mathcal{C}^\infty$, mas somente em $\phi_1(U_{123})$ e não necessariamente em $\phi_1(U_{13})$. A priori não sabemos nada sobre $\phi_3 \circ \phi_1^{-1}$ e $\phi_1(U_{13} \setminus U_{123})$ e portanto não podemos concluir que (U_1, ϕ_1) e (U_3, ϕ_3) são $\mathcal{C}^\infty$-compatíveis.

Definição 13. *Dizemos que (V, ψ) é compatível com um atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ quando é compatível com todas os cartas (U_α, ϕ_α) do atlas.*

É tentador falar agora que uma variedade diferenciável é simplesmente uma variedade topológica com um atlas compatível... mas caso o atlas não tenha todas as cartas que poderia ter, isso gera problemas. Por isso, precisaremos da seguinte:

Definição 14. *Um atlas compatível $\mathcal{A}$ em $\mathcal{M}$ é dito máximal quando não está contido em nenhum outro. Equivalentemente, dado qualquer homeomorfismo $\varphi : U \subset \mathcal{M} \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ e qualquer $\varphi_V \in \mathcal{A}$ com $V \cap U \doteq W \neq \emptyset$ tal que as composições $\varphi_V \circ \varphi^{-1}$ e $\varphi \circ \varphi_V^{-1}$ são difeomorfismos, então $\varphi \in \mathcal{A}$.*

Evidentemente se $\mathcal{A}$ é um atlas, existe (somente) um atlas maximal $\overline{A}$ tal que $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$: basta acrescentar a $\mathcal{A}$ todas as cartas que satisfazem a propriedade da definição acima.

Terminologia. *Um atlas maximal é também chamado de uma estrutura diferenciável.*

Agora, sim podemos introduzir a

Definição 15. *Uma variedade diferenciável $\mathcal{M}^n$ é uma variedade topológica munida de uma estrutura diferenciável.*

Como é evidente das definições, se espera que todos os teoremas locais vistos na seção anterior continuem valendo para variedades: afinal, elas são simplesmente "pedacinhos de $\mathbb{R}^n$ colados de maneira diferenciável". Confirmaremos essa intuição em breve. Antes, vejamos alguns exemplos (convém observar que em geral não damos um atlas maximal ao provar que um espaço é uma variedade diferenciável: só damos um atlas, e o maximal associado a ele é implicitamente assumido):

Exemplo. $\mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável. De fato, ele é trivialmente localmente Euclidiano, e $\mathcal{A} = \{\mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$ é um atlas para $\mathbb{R}^n$, cujo atlas maximal é evidentemente $\bar{\mathcal{A}} = \{\varphi : U \to \varphi(U) \mid \varphi \text{ é um difeomorfismo}\}$.

Exercício 39. *Mostre que todo aberto de uma variedade diferenciável é por si só uma variedade diferenciável também, e use esse fato para provar que o conjunto das matrizes n por n que são invertíveis (considerado como subconjunto de $\mathbb{R}^{n^2}$) é uma variedade diferenciável.*

Exemplo. $\mathbb{S}^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|v\| = 1\}$ com a topologia induzida de $\mathbb{R}^{n+1}$ é uma variedade diferenciável: como atlas, basta pegar as projeções estereográficas do polo norte e do polo sul.

Exercício 40. *Verifique os detalhes do exemplo anterior. E responda: porque qualquer atlas da variedade anterior possui no mínimo duas cartas?*

Exemplo. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$. Então

$$\mathrm{graf}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$$

é uma variedade diferenciável, e um atlas para ela é $\mathrm{graf}(f) \ni (x, f(x)) \mapsto \pi(x) = x \in U$

Exemplo. Sejam $\mathcal{M}^m$ e $\mathcal{N}^n$ variedades diferenciáveis e considere o espaço $\mathcal{M}^m \times \mathcal{N}^n$ com a topologia produto. Evidentemente ele é localmente Euclidiano. Além disso, dado $(p_1, p_2) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, sabemos que existem cartas (φ_1, U_1) e (φ_2, U_2) em torno de p_1 e p_2, respectivamente, e podemos definir então

$$\begin{aligned} \varphi_{U\times V} : U_1 \times U_2 &\to \mathbb{R}^{n+m} \\ (p_1, p_2) &\mapsto (\varphi_1(p_1), \varphi_2(q_2)) = (\varphi_1 \times \varphi_2)(p_1, p_2) \end{aligned}$$

Sendo então $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ e $\{(V_i, \psi_i)\}$ atlas $\mathcal{C}^\infty$ para $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ respectivamente, isso nos motiva a definir o possível atlas para o produto dado por

$$\{(U_\alpha \times V_i, \phi_\alpha \times \psi_i : U_\alpha \times V_i)\}$$

que é de fato um atlas $\mathcal{C}^\infty$, já que dados quaisquer cartas (U, φ_U), $(U', \varphi_{U'})$, (V, φ_V), $(V', \varphi_{V'})$ em torno de $p_1 \in \mathcal{M}$ e $p_2 \in \mathcal{N}$, a mudança de coordenadas satisfaz:

$$\varphi_{U\times V} \circ \varphi^{-1}_{U'\times V'} = (\varphi_U \times \varphi_V) \circ (\varphi_{U'} \times \varphi_{V'})^{-1} = (\varphi_U \circ \varphi^{-1}_{U'}) \times (\varphi_V \circ \varphi^{-1}_{V'})$$

e é portanto suave, já que é uma função entre abertos euclidianos cujas funções componentes são todas suaves.

2.3 Como fazer cálculo em variedades

2.3.1 Aplicações diferenciáveis entre variedades

Definição 16. *Uma função contínua $F : M_1 \to M_2$ entre duas variedades é dita diferenciável (ou $\mathcal{C}^\infty$) em $p \in M_1$ se existe uma carta (φ, U) em torno de p e uma carta (ξ, V) em* *torno de $F(p)$ tal que a composição $\xi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(F^{-1}(V) \cap U) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $\varphi(p)$. Quando isso acontece em todo $p \in M_1$, dizemos que F é diferenciável.*

Observação. De fato isso está bem definido, ou seja, a diferenciabilidade não depende das cartas escolhidas. Com efeito, suponhamos que $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é suave em $p \in \mathcal{M}$ e sejam (U, ϕ), (V, ψ) cartas arbitrárias em torno de p e $F(p)$, respectivamente. Como F é suave em p, existem cartas (U_α, ϕ_α) em torno de $p \in \mathcal{M}$ e (V_β, ψ_β) em torno de $F(p) \in \mathcal{N}$ tal que $\psi_\beta \circ F \circ \phi_\alpha^{-1}$ é suave em $\phi_\alpha(p)$. Pela compatibilidade $\mathcal{C}^\infty$ de cartas em uma estrutura diferenciável, as composições $\phi_\alpha \circ \phi^{-1}$ e $\psi \circ \psi_\beta^{-1}$ são $\mathcal{C}^\infty$ em subconjuntos abertos de espaços Euclidianos. Segue então que a composição:

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} = (\psi \circ \psi_\beta^{-1}) \circ (\psi_\beta \circ F \circ \phi_\alpha^{-1}) \circ (\phi_\alpha \circ \phi^{-1})$$

é $\mathcal{C}^\infty$ em $\phi(p)$.

Observe que temos de tomar cuidado com os domínios da composição acima, evidentemente ela só está definida quando restringimos os domínios das cartas. Mas não precisamos nos preocupar com isso, já que não há perda de generalidade em supor, por exemplo, que $U \subset U_\alpha$, $F(U_\alpha) \subset V_\beta$ e $U_\beta \subset U$ (caso contrário, trabalhemos com a carta ϕ' obtida por restringir ϕ a $U' = U \cap U_\alpha \subset U_\alpha$, o que podemos fazer pois estamos trabalhando com um atlas maximal - analogamente podemos restringir aos abertos $F^{-1}(V_\beta) \cap U_\alpha$ e $V \cap V_\beta$).

Terminologia. *Se $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é uma aplicação suave e (U, φ) e (V, ψ) são cartas suaves para $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, respectivamente, chamamos $\widehat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ da representação em coordenadas de F com respeito a essas coordenadas. Ela manda (difeomorficamente) o aberto Euclidiano $\varphi(U \cap F^{-1}(V))$ no aberto Euclidiano $\psi(V)$.*

Exercício 41. *Particularize a definição de diferenciabilidade de aplicações entre variedades para uma definição de diferenciabilidade de aplicações entre uma variedade e $\mathbb{R}^n$.*

Definição 17. *Diremos que uma função f diferenciável entre duas variedades é um difeomorfismo quando f é bijetiva e f^{-1} também é diferenciável.*

Definição 18. *Dizemos que $f : M_1 \to M_2$ é um difeomorfismo local quando $\forall p \in M_1$, existe uma carta (φ, U) em torno de p e um aberto $M_2 \supset V \ni f(p)$ tal que $f|_U : U \to V$ é um difeomorfismo.*

Exercício 42. *Verifique que $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ definida por $\exp(\theta) = e^{i\theta}$ é um difeomorfismo local mas não global.*

Exercício 43. *Verifique que as projeções*

$$\begin{aligned} \pi_i : \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 &\to \mathcal{M}_i \\ (p_1, p_2) &\mapsto p_i, i \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

são diferenciáveis.

Exercício 44. *Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ variedades diferenciáveis. Mostre que uma aplicação constante entre $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ é suave, e que a aplicação identidade de $\mathcal{M}$ é suave.*

Exercício 45. *Verifique que a composição de aplicações diferenciáveis entre variedades é diferenciável.*

Proposição 2.1. *Seja (U, ϕ) um sistema de coordenadas em uma variedade $\mathcal{M}^n$. Então a carta $\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo.*

Demonstração: ϕ já nasceu sendo um homeomorfismo, resta mostrarmos que ela e sua inversa são suaves. Para testar a suavidade de $\phi : U \to \phi(U)$, podemos usar o atlas $\{(U, \phi)\}$ de uma carta só em U e o atlas $\{(\phi(U), \mathrm{Id}_{\phi(U)})\}$ no aberto Euclidiano $\phi(U)$. Como $\mathrm{Id}_{\phi(U)} \circ \phi \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \phi(U)$ é a aplicação identidade, ϕ é suave. Analogamente se prova que ϕ^{-1} é suave.

∎

Proposição 2.2. *Seja U um aberto de uma variedade $\mathcal{M}^n$. Se $F : U \to F(U) \subset \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo sobre um aberto de $\mathbb{R}^n$, então (U, F) é um sistema de coordenadas na estrutura diferenciável de $\mathcal{M}$.*

Demonstração: Seja qual for o sistema de coordenadas (U_α, ϕ_α) no atlas maximal de $\mathcal{M}$, tanto ϕ_α quanto sua inversa são suaves pela proposição anterior. Como composições de aplicações suaves, tanto $F \circ \phi_\alpha^{-1}$ quanto sua inversa são suaves, donde segue que (U, F) é compatível com o atlas maximal de $\mathcal{M}$ e portanto (já que o atlas é maximal) que F é uma carta de um sistema de coordenadas em torno de U.

∎

Teorema 2.3 (Invariância da Dimensão por Difeomorfismos)**.** *Se $m \neq n$, uma variedade diferenciável suave de dimensão m não é difeomorfa a nenhuma variedade diferenciável de dimensão n.*

Demonstração: Sejam $\emptyset \neq \mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ variedades diferenciáveis de dimensão m e n. Suponha que $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é um difeomorfismo. Escolhamos qualquer ponto $p \in \mathcal{M}$ e sejam (U, φ) e (V, ψ) sistemas de coordenadas suaves em torno de p e $F(p)$, respectivamente. Então a representação em coordenadas de F é um difeomorfismo entre abertos Euclidianos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, portanto $m = n$.

∎

Exercício 46. *Prove que a aplicação $\mathbb{R} \ni t \mapsto (\cos(t), \mathrm{sen}(t)) \in \mathbb{S}^1$ é suave.*

Exercício 47. *Mostre que toda composição ou produto finito de difeomorfismos é um difeomorfismo e que difeomorfismos induzem uma relação de equivalência no conjunto de todas as variedades diferenciáveis.*

Exercício 48. *Sejam $\mathcal{M}_1, \cdots, \mathcal{M}_k, \mathcal{N}$ variedades diferenciáveis, e para cada $1 \leq i \leq k$, denotemos por $\pi_i : \mathcal{M}_1 \times \cdots \times \mathcal{M}_k$ a projeção no fator $\mathcal{M}_i$. Prove que uma aplicação $F : \mathcal{N} \to \mathcal{M}_1 \times \cdots \times \mathcal{M}_k$ é suave se, e somente se, cada função componente $F_i = \pi_i \circ F$ é suave.*

Exercício 49. *Seja $\widetilde{\mathbb{R}}$ a variedade topológica $\mathbb{R}$ com a estrutura diferenciável definida pela carta global $x \mapsto x^3$. Verifique que essa é de fato uma estrutura diferenciável em $\mathbb{R}$ e que $\widetilde{\mathbb{R}}$ é difeomorfa a $\mathbb{R}$ com sua estrutura diferenciável padrão (dada pela carta global $x \mapsto x$).*

2.4 O espaço tangente como uma entidade abstrata

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável e $W \subset \mathcal{M}$ um aberto. Daqui em diante, denotaremos por $\mathcal{C}^\infty(W)$ o espaço de funções suaves definidas na variedade W (claro, com a estrutura diferenciável natural que W herda de $\mathcal{M}$). O espaço $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ é uma *álgebra* (ou seja, um espaço vetorial onde podemos multiplicar elementos) com as operações óbvias de multiplicação e adição definidas pontualmente.

Exercício 50. *Prove que $\mathcal{C}^\infty(W)$ sempre tem dimensão infinita.*

Antes de prosseguirmos, voltemos a $\mathbb{R}^n$ para introduzir mais um pouco de notação. Denotemos por $r^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função $\mathbb{R}^n \ni (x^1, \cdots, x^n) \mapsto r^i(x^1, \cdots, x^n) = x^i$ e por e_i o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$, de forma que $r^i(e_j) = \delta^i_j$.

Sendo $\mathcal{M}$ uma variedade e σ uma carta definida numa vizinhança de um ponto $p \in \mathcal{M}$, denotaremos a função $r^i \circ \sigma$ simplesmente por x^i, e chamaremos as funções x^i das *coordenadas* da carta σ ou *coordenadas locais em torno de* p. Frequentemente abusamos dessa linguagem e escrevemos coisas como *seja $p = (p^1, \cdots, p^n)$ um ponto em $\mathcal{M}$.*

Definição 19. *Sejam $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável, $x \in \mathcal{M}$, U, V duas vizinhanças de x e $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $g \in \mathcal{C}^\infty(V)$. Dizemos que f e g têm o mesmo germe em x se existe uma vizinhança menor $W \subset U \cap V$ tal que f e g coincidem quando restritas a W.*

Definindo uma relação de equivalência óbvia no conjunto de funções suaves em torno de x, pondo $(U, f) \sim (V, g)$ caso exista uma vizinhança $W \subset U \cap V$ tal que f e g coincidem quanto restritas a W, podemos pensar nos germes como classes de equivalência. O germe de f é denotado por $[f]$, e conjunto de germes em x é denotado por $\mathcal{F}_x(\mathcal{M})$.

Um germe em x tem um valor bem definido (somente) em x, e isso induz então uma aplicação $\mathcal{F}_x\mathcal{M} \ni [f] \mapsto \mathrm{eval}_x([f]) = f(x)$.

Exercício 51. *Mostre que $\mathcal{F}_x\mathcal{M} \cap \mathcal{F}_y\mathcal{M} = \emptyset$ sempre que $x \neq y$.*

Podemos então definir o que é um vetor tangente em um ponto $x \in \mathcal{M}$.

Definição 20. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável e $x \in \mathcal{M}$. Um vetor tangente em x*

é uma aplicação linear

$$v : \mathcal{F}_x(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$$

que satisfaz a propriedade de derivação:

$$v([fg]) = \mathrm{eval}_x([f])v(g) + \mathrm{eval}_x([g])v(f)$$

Como um vetor tangente é uma aplicação linear entre espaços vetoriais, o próprio conjunto de todos os vetores tangentes é um espaço vetorial, que denotamos por $T_x(\mathcal{M})$. Provaremos em breve que ele tem a mesma dimensão que $\mathcal{M}$.

Exercício 52. *Seja v um vetor tangente em $x \in \mathcal{M}$ e c uma função constante definida em $\mathcal{M}$. Prove que $v([c]) = 0$.*

Como germes são definidos via classes de equivalência, acaba sendo um pouco mais chato trabalhar com eles. Por isso reformularemos a definição de um vetor tangente de uma maneira um pouco mais conveniente.

Definição 21. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável, $x \in \mathcal{M}$, e seja W qualquer vizinhança de x. Uma derivação de $\mathcal{C}^\infty(W)$ em x é uma aplicação linear $w : \mathcal{C}^\infty(W) \to \mathbb{R}$ que satisfaz a propriedade de derivação*

$$w(fg) = f(x)w(g) + g(x)w(f)$$

Todo vetor $v \in T_x(\mathcal{M})$ induz naturalmente uma derivação w de $\mathcal{C}^\infty(W)$ seja qual for a vizinhança W de x ao colocar

$$w(f) \doteq v([f])$$

Na verdade, a recíproca também vale, como provaremos em seguida. Precisamos primeiro de um lema preliminar, que é o motivo mais importante pelo qual pedimos que variedades sejam Hausdorff e com base enumerável: isso garante que sejam *paracompactas*, o que por sua vez garante que o lema abaixo seja verdade. Lembre que para uma função suave $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, denotamos por $\mathrm{supp}(f)$ o *suporte* de f, definido por

$$\mathrm{supp}(f) \doteq \overline{\{x \in \mathcal{M} \mid f(x) \neq 0\}}$$

Lema 2.4 (Funções bump). *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável, e $K \subset U \subset \mathcal{M}$ subconjuntos, onde K é fechado e U é aberto. Então existe uma função suave $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ satisfazendo:*

1. $0 \leq f(x) \leq 1$ *seja qual for* $x \in \mathcal{M}$
2. $\mathrm{supp}(f) \subset U$
3. $f(x) = 1$ *seja qual for* $x \in K$

Demonstração: Veja [4].

■

Proposição 2.5. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável, $x \in \mathcal{M}$, e seja W qualquer vizinhança de x. Então existe um isomorfismo linear entre $T_x(\mathcal{M})$ e o espaço de derivações de $\mathcal{C}^\infty(W)$ em x.*

Demonstração: Seja W qualquer vizinhança de x. Provaremos o resultado em três passos:

1. Seja $w : \mathcal{C}^\infty(W) \to \mathbb{R}$ uma derivação em x e suponha que $f \in \mathcal{C}^\infty(W)$ é identicamente nula em uma vizinhança $V \subset W$ de x. Afirmamos que $w(f) = 0$. Para ver isso, escolhamos uma função suave $\eta : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ tal que $\eta(x) = 1$ e $\operatorname{supp}(\eta) \subset V$ (cuja existência é garantida pelo lema anterior com $K = \{x\}$ e "U" igual a V). Definamos $g = \eta f$, pensada como uma função de W para $\mathbb{R}$. Evidentemente g é identicamente nula (pela construção de f ela se anula em V, e como o suporte de η está em V, também se anula fora de V e portanto se anula em todo W) portanto $w(g) = 0$ por linearidade (sendo f_1 a função constante igual a 1 em W, note que $w(g) = w(0 \cdot f_1) = 0w(f_1) = 0$). Mas pela propriedade de derivação:
$$w(g) = w(\eta f) = \eta(x)w(f) + f(x)w(\eta) = w(f)$$
pois $\eta(x) = 1$ e $f(x) = 0$. Logo $w(f) = 0$.

2. Seja agora $[f] \in \mathcal{F}_x(\mathcal{M})$. Afirmamos que sempre podemos encontrar um representante de $[f]$ com domínio W, ou seja, uma função suave $g : W \to \mathbb{R}$ satisfazendo $[g] = [f]$. Para isso, seja (V, f) qualquer representante de $[f]$. Encolhendo V caso necessário, podemos assumir que $V \subset W$ (caso não estivesse, bastaria intersectar com W e estaria, onde evidentemente não perdemos nada com isso pela própria definição dos germes). Escolhamos agora uma vizinhança menor U de x tal que $\overline{U} \subset V \subset W$ (que existe pois toda variedade é regular). Nosso objetivo agora é *estender* f a uma função suave g definida em W tal que $g|_U = f$. Para isso, apliquemos o lema 2.4 novamente, dessa vez com $K = \bar{U}$ e "U" igual a V. Consideremos agora a função suave
$$g : W \to \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} \eta(x)f(x), & x \in V \\ 0, & x \in W \backslash V \end{cases}$$
Como $g|_U = f$, é claro que $[g] = [f]$.

3. Agora terminarmos a prova. Seja $w : \mathcal{C}^\infty(W) \to \mathbb{R}$ uma derivação em x. Definimos uma aplicação linear $v : \mathcal{F}_x(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ pondo
$$v([f]) \doteq w(f), \text{ onde } (W, f) \text{ é qualquer representante de } [f]$$
Que existe pelo passo 2 e está bem definido pelo passo 1. De fato, se (W, h) fosse outro representante de f, então por hipótese existiria uma vizinhança menor V de x tal que f e g coincidem em V. Então por linearidade $w(f) - w(h) = w(f - h) = 0$, onde $w(f - h) = 0$ pelo passo 1. Finalmente, é claro que v é uma derivação, e evidentemente a associação $w \mapsto v$ inverte a associação introduzida logo após a definição 20. O isomorfismo desejado é então exatamente $w \mapsto v$.

■

Graças a essa proposição, de agora em diante sempre consideraremos um vetor tangente v como uma derivação de $\mathcal{C}^\infty(W)$ em x para qualquer aberto W contendo x. Geralmente tomamos W como o domínio de uma carta ou como a variedade $\mathcal{M}$ toda. Enfatizamos que por causa dessa proposição, não importa qual W escolhamos:

Corolário 2.6. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável e $\emptyset \neq W \subset \mathcal{M}$ um aberto. Considerando W como uma variedade diferenciável com a estrutura herdada de $\mathcal{M}$, então para qualquer $x \in W$ existe uma identificação canônica $T_x\mathcal{M} \cong T_xW$.*

O seguinte corolário é também imediato do exercício 50:

Corolário 2.7. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável, $p \in \mathcal{M}$, e seja $f \in \mathcal{C}^\infty(W)$ para algum aberto $W \ni x$. Se f é constante em alguma vizinhança de p então $v(f) = 0$ seja qual for $v \in T_p(\mathcal{M})$.*

Um exemplo concreto de um vetor tangente é o seguinte:

Exemplo. Sejam $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável de dimensão n, $\sigma : U \to O$ uma carta em $\mathcal{M}$, e escrevamos $x^i = r^i \circ \sigma$ para denotar as coordenadas locais de σ. Seja $p \in U$ arbitrário. Definimos uma derivação de $\mathcal{C}^\infty(U)$ em p por:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p : \mathcal{C}^\infty(U) \to \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f) \doteq \frac{\partial(f \circ \sigma^{-1})}{\partial r^i}(p) = \mathrm{d}(f \circ \sigma^{-1})_{\sigma(p)}(e_i)$$

Provaremos em breve que a coleção dos $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$, com $i \in \{1, \cdots, n\}$, forma uma base de $T_p(\mathcal{M})$.

Precisaremos do lema abaixo de estabelecer a dimensão do espaço tangente. Antes, será útil introduzir a seguinte notação: se $f : O \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é uma aplicação suave definida num aberto de $\mathbb{R}^n$ e $x \in O$, denotamos a derivada parcial de f em x com respeito ao j-ésimo vetor canônico por:

$$D_j f(x) = \mathrm{d}f_x(e_j) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t}$$

Lema 2.8. *Seja $O \subset \mathbb{R}^n$ um aberto estrelado com $0 \in O$ (ou seja, dado qualquer $x \in O$, o segmento de reta de 0 a x está contido em O). Suponha que $h : O \to \mathbb{R}$ é uma função suave. Então existem n funções suaves $g_i : O \to \mathbb{R}$ com $i \in \{1, \cdots, n\}$ tais que $g_i(0) = D_i h(0)$ satisfazendo*

$$h = h(0) + r^i g_i$$

Demonstração: Fixe $x = (x^1, \cdots, x^n) \in O$ e considere o segmento de reta de 0 até x dado por $\gamma(t) = tx$. Colocando $\delta = h \circ \gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}$, a regra da cadeia nos diz que

$$\delta'(t) = \sum_{i=1}^{n} x^i D_i h(tx)$$

Logo

$$h(x) - h(0) = \delta(1) - \delta(0) = \int_0^1 \delta'(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} x^i \int_0^1 D_i h(tx)\ \mathrm{d}t$$

Como $x^i = r^i(x)$ por definição, o resultado desejado segue ao definir $g_i(x) = \int_0^1 D_i h(tx)\,\mathrm{d}t$.

■

Estamos finalmente prontos então para provar o

Teorema 2.9. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável de dimensão n, $\sigma : U \to O$ uma carta em $\mathcal{M}$ e $x \in U$. Então qualquer $v \in T_x(\mathcal{M})$ se escreve unicamente como uma combinação linear da forma*

$$v = a^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x$$

onde $a^i = v(x^i)$. Portanto

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x \ \text{com } 1 \leq i \leq n \right\}$$

é uma base de $T_x(\mathcal{M})$.

Demonstração: Podemos assumir sem perda de generalidade que σ está centrada em x e que O é um aberto estrelado (note que estamos usando o corolário 2.6 aqui). Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ e apliquemos o lema anterior com $h = f \circ \sigma^{-1}$. Obtemos então $f = f(x) + x^i (g_i \circ \sigma)$, onde

$$g_i(0) = D_i \left(f \circ \sigma^{-1}\right)(0) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x (f)$$

Então para qualquer derivação v, temos

$$v(f) = \underbrace{v(f(x))}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} (v\left(x^i\right) g_i(0) + \underbrace{x^i(x)}_{=0} v\left(g_i \circ \sigma\right)) = \sum_{i=1}^{n} v\left(x^i\right) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x (f)$$

onde usamos o corolário 2.7 e a hipótese $\sigma(x) = 0$.

Resta mostrar que os vetores são linearmente independentes. Note que:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x \left(x^j\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x \left(r^j \circ \sigma\right) = D_i \left(r^j \circ \sigma \circ \sigma^{-1}\right)(\sigma(x)) = D_i r^j(\sigma(x)) = \delta_i^j$$

onde usamos o fato de que $\mathrm{d}r^j = r^j$, pois r^j é linear. Assim, se $v = a^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x = 0$, temos $v(x^j) = a^j = 0$.

■

Observação. Suponha que σ e τ são duas cartas em tornos de um ponto x, com sistemas de coordenadas correspondentes $x^i = r^i \circ \sigma$ e $y^i = r^i \circ \tau$. Tomando $v = a^i \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_x$ na proposição anterior obtemos então

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_x = \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_x \left(x^i\right) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x$$

Mas abrindo as definições,

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_x \left(x^i\right) = D_j \left(x^i \circ \tau^{-1}\right)(\tau(x)) = D_j \left(u^i \circ \sigma \circ \tau^{-1}\right)(\tau(x))$$

que é simplesmente a (i, j)-ésima entrada da matriz de $\mathrm{d}(\sigma \circ \tau^{-1})_{\tau(x)}$, o que mostra que a matriz de mudança de base entre as bases $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_x\right\}_{1 \leq 1 \leq n}$ e $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x\right\}_{1 \leq 1 \leq n}$ é dada pela matriz de $\mathrm{d}(\sigma \circ \tau^{-1})_{\tau(x)}$.

2.4.1 A diferencial e sua expressão em coordenadas locais

Definição 22. *Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ variedades diferenciáveis, e seja $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ uma aplicação suave. Fixe $x \in \mathcal{M}$ e $v \in T_x\mathcal{M}$. Definimos um vetor tangente $w \in T_{\varphi(x)}\mathcal{N}$ por*

$$w(f) \doteq v(f \circ \varphi), \text{ para cada } f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N})$$

É claro que w é uma derivação linear de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{N})$ em $\varphi(x)$, e portanto $w \in T_{\varphi(x)}\mathcal{N}$. Além disso, se denotarmos w por $\mathrm{d}\varphi_x(v)$, evidentemente a aplicação $T_x\mathcal{M} \ni v \mapsto \mathrm{d}\varphi_x(v) \in T_{\varphi(x)}\mathcal{N}$ é linear. Dizemos que $\mathrm{d}\varphi_x$ é a derivada (ou diferencial) de φ em x.

Teorema 2.10 (*A regra da cadeia em variedades*)**.** *Sejam $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ e $\mathcal{V}$ variedades diferenciáveis, e suponha que $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ e $\psi : \mathcal{N} \to \mathcal{V}$ são aplicações suaves. Então:*

$$\mathrm{d}(\psi \circ \varphi)_x = \mathrm{d}\psi_{\varphi(x)} \circ \mathrm{d}\varphi_x, \forall x \in \mathcal{M}$$

Demonstração: Sejam $v \in T_x\mathcal{M}$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ arbitrários. Então:

$$\mathrm{d}(\psi \circ \varphi)_x[v](f) = v(f \circ \psi \circ \varphi) = \mathrm{d}\varphi_x[v](f \circ \psi) = \mathrm{d}\psi_{\varphi(x)}[\mathrm{d}\varphi_x(v)](f)$$

■

Exercício 53. *Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ variedades diferenciáveis, $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ uma aplicação suave e $p \in \mathcal{M}$. Prove que*

1. $\mathrm{d}F_p$ *é linear*
2. $\mathrm{d}(\mathrm{Id}_{\mathcal{M}})_p = \mathrm{Id}_{T_p\mathcal{M}} : T_p\mathcal{M} \to T_p\mathcal{M}$
3. *Se F é um difeomorfismo, então $\mathrm{d}F_p$ é um isomorfismo e satisfaz $(\mathrm{d}F_p)^{-1} = \mathrm{d}(F^{-1})_{F(p)}$*

Calculemos agora a aplicação $\mathrm{d}\varphi_x$ em coordenadas:

Lema 2.11. *Seja $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ uma aplicação suave entre duas variedades diferenciáveis, de dimensão n e k, respectivamente. Seja $x \in \mathcal{M}$, $\sigma : U \to O$ uma carta em $\mathcal{M}$ em torno de x, e seja $\tau : V \to \Omega$ uma carta em $\mathcal{N}$ em torno de $\varphi(x)$. Denotemos as coordenadas locais de σ por (x^i) e as de τ por (y^i). Então a matriz de $\mathrm{d}\varphi_x$ com respeito às bases $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x \right\}_{1\leq j\leq n}$ de $T_x\mathcal{M}$ e $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{\varphi(x)} \right\}_{1\leq 1\leq k}$ de $T_{\varphi(x)}\mathcal{N}$ é dada pela matriz de $\mathrm{d}(\tau \circ \varphi \circ \sigma^{-1})_{\sigma(x)}$.*

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\varphi_x \left[\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x \right] &= \mathrm{d}\varphi_x \left[\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x \right] (y^i) \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{\varphi(x)} \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x \left(y^i \circ \varphi\right) \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{\varphi(x)} \\
&= D_j \left(r^i \circ \tau \circ \varphi \circ \sigma^{-1}\right) (\sigma(x)) \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{\varphi(x)}
\end{aligned}$$

Como o número $D_j \left(r^i \circ \tau \circ \varphi \circ \sigma^{-1}\right) (\sigma(x))$ é simplesmente a (i, j)-ésima entrada da matriz $\mathrm{d}\left(\tau \circ \varphi \circ \sigma^{-1}\right)_{\sigma(x)}$, terminamos a prova.

■

Teorema 2.12 (**O Teorema da Função Inversa para Variedades**)**.** *Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ variedaedes diferenciáveis, e suponha que $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é suave. Se $p \in \mathcal{M}$ é um ponto tal que $\mathrm{d}F_p$ é invertível, então existem vizinhanças conexas $U_0 \ni p$ e $V_0 \ni F(p)$ tal que $F|_{U_0} : U_0 \to V_0$ é um difeomorfismo.*

Demonstração: O fato de $\mathrm{d}F_p$ ser bijetora implica que $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ têm a mesma dimensão, digamos n. Escolhamos cartas suaves (U, φ) e (V, ψ) centradas em p e em $F(p)$, respectivamente, com $F(U) \subset V$. Então a representação em coordenadas de F, dada por $\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ é uma aplicação suave de um aberto Euclidiano (a saber, $\hat{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$) em outro aberto Euclidiano (a saber, $\hat{V} = \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$) satisfazendo $\hat{F}(p) = 0$. Como φ e ψ são difeomorfismos, a diferencial $\mathrm{d}\hat{F}_0 = \mathrm{d}\psi_{F(p)} \circ \mathrm{d}F_p \circ \mathrm{d}(\varphi^{-1})_0$ tem determinante não nulo. O teorema da função inversa para $\mathbb{R}^n$ garante então a existência de subconjuntos abertos conexos $\hat{U}_0 \subset \hat{U}$ e $\hat{V}_0 \subset \hat{V}$ contendo 0 tais que $\hat{F}$ induz um difeomorfismo entre $\hat{U}_0$ e $\hat{V}_0$. Então $U_0 = \varphi^{-1}\left(\hat{U}_0\right)$ e $V_0 = \psi^{-1}\left(\hat{V}_0\right)$ são vizinhanças conexas de p e $F(p)$, respectivamente, e segue que $F = \psi^{-1} \circ \hat{F} \circ \varphi$ é um difeomorfismo entre U_0 e V_0.

■

Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ variedades de dimensão n e k respectivamente, $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ uma aplicação suave e tomemos cartas σ em torno de um ponto x de $\mathcal{M}$, τ em torno de $\varphi(x)$, e definamos isomorfismos lineares

$$\begin{aligned} T_x : \mathbb{R}^n &\to T_x\mathcal{M} \\ e_i &\mapsto T_x e_i = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x \end{aligned}$$

Analogamente, denotando por $e_j^{'}$ a base canônica de $\mathbb{R}^k$, temos um isomorfismo linear

$$\begin{aligned} T_{\varphi(x)} : \mathbb{R}^k &\to T_{\varphi(x)}\mathcal{N} \\ e_j^{'} &\mapsto T_{\varphi(x)} e_j^{'} = \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\varphi(x)} \end{aligned}$$

Exercício 54. *Prove que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathrm{d}\left(\tau\circ\varphi\circ\sigma^{-1}\right)_{\sigma(x)}"] \arrow[d, "T_x"'] & \mathbb{R}^k \arrow[d, "T_{\varphi(x)}"] \\ T_x\mathcal{M} \arrow[r, "\mathrm{d}\varphi_x"'] & T_{\varphi(x)}\mathcal{N} \end{tikzcd}$$

Em particular, explique porque para uma função suave $f : O \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ a nossa primeira definição de $\mathrm{d}f_p$ coincide com a definição dada agora para a diferencial de uma aplicação suave entre variedades.

Daremos agora uma forma diferente de definir vetores tangentes, que embora não seja tão esteticamente agradável como derivações, tem a vantagem de facilitar os cálculos.

Suponha que $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ é uma função suave. Geralmente escrevemos a função coordenada em $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ como t ao invés de x^1, e denotamos a derivada de γ em um ponto t por $\gamma'(t)$. Escrevendo $\gamma = (\gamma^1, \cdots, \gamma^n)$, o vetor $\gamma'(t)$ é exatamente o vetor linha $((\gamma^1)'(t), \cdots, (\gamma^n)'(t))$. Nosso objetivo agora é estender isso a variedades.

Definição 23. *Uma curva em uma variedade diferenciável $\mathcal{M}$ é uma aplicação suave $\gamma : (a, b) \to \mathcal{M}$, onde pensamos em (a, b) como uma variedade suave unidimensional. Fixe $t \in (a, b)$. Existem, a priori, duas maneiras diferentes de definirmos um elemento $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$, que chamaremos do vetor velocidade de γ no instante t.*

1. *Primeiramente, podemos definir uma derivaão em $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ em $\gamma(t)$ ao pôr*

$$\gamma'(t)(f) \doteq (f \circ \gamma)'(t)$$

   para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$.

2. *Alternativamente, se pensarmos em γ como uma aplicação suave entre variedades podemos definir um vetor tangente $\gamma'(t)$ em $\gamma(t)$ via a derivada $\mathrm{d}\gamma_t$:*

$$\gamma'(t) = \mathrm{d}\gamma_t \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_t \right) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$$

Para vermos que essas duas definições coincidem, seja $\sigma : U \to O$ uma carta em torno de $\gamma(t)$ e denotemos por (x^i) as coordenadas de σ. Seja $\gamma^i \doteq x^i \circ \gamma$, de forma que γ^i é uma curva em $\mathbb{R}$. Aplicando o teorema 2.9 na primeira definição, vemos que

$$\gamma'(t) = (\gamma^i)'(t) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(t)},$$

já que $\gamma'(t)(x^i) = (x^i \circ \gamma)'(t) = (\gamma^i)'(t)$. Mas aplicando o lema 2.11 à segunda definição, vemos que essa definição dá a mesma fórmula acima para $\gamma'(t)$.

Lema 2.13. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável e sejam $\gamma, \delta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{M}$ duas curvas suaves tais que $\gamma(0) = \delta(0)$. Então $\gamma'(0)$ e $\delta'(0)$ coincidem como elementos de $T_{\gamma(0)}\mathcal{M}$ se, e somente se, para alguma (e portanto para qualquer uma) carta $\sigma : U \to O$ definida numa vizinhança de $\gamma(0)$, temos*

$$(\sigma \circ \gamma)'(0) = (\sigma \circ \delta)'(0).$$

Demonstração: Denotemos por (x^i) as coordenadas de σ. A condição declarada é eequivalente a pedir que $(\gamma^i)'(0) = (\delta^i)'(0)$ para cada i, onde $\gamma^i = x^i \circ \gamma$ e $\delta^i = x^i \circ \delta$. O resultado desejado segue então da fórmula obtida para $\gamma'(t)$ logo acima, já que $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(0)} \right\}_{1 \leq i \leq n}$ é uma base de $T_{\gamma(0)}\mathcal{M}$.

■

Exercício 55. *Prove que o vetor tangente $\gamma'(t)$ definido no item 1 da definição 22 é de fato fato uma derivação. Além disso, justifique o "(...) para qualquer uma" afirmado no lema acima.*

Menos evidente mas ainda assim verdade é o fato de que todo vetor tangente pode ser escrito como o vetor velocidade de uma curva:

Proposição 2.14. *Sejam $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável de dimensão n, $x \in \mathcal{M}$ e $v \in T_x\mathcal{M}$. Então existe uma curva suave $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{M}$ tal que $\gamma'(0) = v$.*

Demonstração: Tomemos uma carta $\sigma : U \to O \subset \mathbb{R}^n$ centrada em x. Como sempre, denotemos as coordenadas de σ por (x^i), e seja

$$v = a^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x \in T_x\mathcal{M}$$

arbitrário, onde os a^i são números reais. Como O é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que o vetor $(ta^1, \cdots, ta^n)$ permanece em O sempre que $|t| < \varepsilon$. Então definindo a curva γ por

$$\begin{aligned} \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) &\to \mathcal{M} \\ t &\mapsto \gamma(t) \doteq \sigma^{-1}(ta^1, ta^2, \cdots, ta^n) \end{aligned}$$

é claro que γ está bem definida, é suave e pelo que já fizemos satisfaz $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$.

■

Proposição 2.15. *Seja $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ uma aplicação suave entre duas variedades diferenciáveis, e seja $\gamma : (a, b) \to \mathcal{M}$ uma curva suave em $\mathcal{M}$. Então:*

$$\mathrm{d}\varphi_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = (\varphi \circ \gamma)'(t)$$

Demonstração: Usando o primeiro item da definição 22: tome $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N})$. Então pela definição de $\mathrm{d}\varphi_x$ temos

$$\mathrm{d}\varphi_{\gamma(t)}[\gamma'(t)](f) = \gamma'(t)(f \circ \varphi) = (f \circ \varphi \circ \gamma)'(t) = (\varphi \circ \gamma)'(t)(f)$$

■

Exercício 56. *Prove a proposição anterior usando o segundo item da definição 22.*

Exercício 57. *Seja $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ suave e $p \in \mathcal{M}$ tal que $\mathrm{d}f_p = 0$. Defina o operador $H(f)_p : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ em cartas (x, U) com $p \in U$ exigindo que:*

$$H(f)_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p \right) = \frac{\partial^2 \left(f \circ x^{-1}\right)}{\partial r^i \partial r^j}(x(p))$$

e estendendo por bilinearidade e simetria. Mostre que $H(f)_p$ não depende da carta escolhida e exiba uma expressão explícita para $H(f)_p(v, w)$, onde $v, w \in T_p\mathcal{M}$ são arbitrários.

Exercício 58. *Seja $v \in \mathbb{S}^n$ e defina a função altura com respeito a v na esfera como $h = h_v : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \langle x, v \rangle$. Mostre que h é suave e calcule seus pontos críticos.*

Daremos uma breve olhada agora no espaço dual ao espaço tangente.

Definição 24. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável de dimensão n e seja $x \in \mathcal{M}$. Denotamos o espaço dual $\mathcal{L}(T_x\mathcal{M}, \mathbb{R})$ por $T_x^*\mathcal{M}$ e o chamamos de espaço cotangente de $\mathcal{M}$ em x.*

Logo $T_x^*\mathcal{M}$ é outro espaço vetorial de dimensão n. Como elementos de $T_x\mathcal{M}$ são derivações linear "comendo" funções, podemos interpretar elementos de $T_x^*\mathcal{M}$ como funções "comendo" derivações lineares.

Exemplo. Seja $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável de dimensão n e sejam $x \in \mathcal{M}$, U uma vizinhança de x e $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Então f define um elemento $\mathrm{d}f_x \in T_x^*\mathcal{M}$ por

$$v \in T_x\mathcal{M} \mapsto \mathrm{d}f_x(v) \doteq v(f)$$

para cada $v \in T_x\mathcal{M}$. $\mathrm{d}f_x$ é chamada da diferencial de f em x.

Observação. Da maneira vista acima, $\mathrm{d}f_x$ é uma aplicação linear de $T_x\mathcal{M}$ para $\mathbb{R}$. Em contraste, a derivada $\mathrm{d}f_x$ que definimos no contexto de variedades agora (que denotaremos logo a seguir por $\mathrm{D}f_x$ para evitar mais confusões) é uma função linear $T_x\mathcal{M} \to T_{f(x)}\mathbb{R}$, mas uma vez que realizamos a identificação óbvia $T_{f(x)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, essas duas coincidem e por isso não as distinguimos. Note que

$$\mathbb{R} \ni \mathrm{d}f_x[v] = \mathrm{D}f_x(v) \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{f(x)} \in T_{f(x)}\mathbb{R}$$

Isso faz todo o sentido, já que sob o isomorfismo mencionado anteriormente, em qualquer $p \in \mathbb{R}$ o vetor tangente

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_p$$

é identificado com o número real 1. Costuma-se abusar a notação e dizer que $T_p\mathbb{R} = \langle 1 \rangle$, ou seja que $\{1\}$ é uma base de $T_p\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$.

2.5 Campos vetoriais

Um campo vetorial X em uma variedade diferencíável $\mathcal{M}$ é uma correspondência que associa a cada $p \in \mathcal{M}$ um vetor tangente $X(p) \in T_p\mathcal{M}$. Considerando uma parametrização $\phi : U \subset \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$, podemos escrever

$$X(p) = a^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

onde cada $a^i : U \to \mathbb{R}$ é uma função real definida em U. Dizemos que o campo X é diferenciável em $p \in \mathcal{M}$ quando em alguma parametrização (e portanto em qualquer uma) as suas componentes a^i são diferenciáveis. Quando X é diferenciável em todo ponto, dizemos simplesmente que X é um campo vetorial diferenciável.

Exercício 59. *Mostre que não há nenhuma noção natural do que seria um campo vetorial "constante" em variedades diferenciáveis em geral. Mais especificamente, mostre que se X é um campo vetorial que pode ser expresso em coordenadas locais $(x^1, \cdots, x^n)$ em torno de um $p \in \mathcal{M}$ por*

$$X(p) = X^k(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p$$

então a igualdade $\mathrm{d}X^j_p \equiv 0$ não é invariante por mudança de coordenadas. Dica: você deve provar que vale

$$\mathrm{d}\tilde{X}^i_p(v) = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}(p) \cdot \mathrm{d}X^j_p(v) + \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^j \partial x^k}(p) \cdot v^k X^j(p)$$

seja qual for $v \in T_p\mathcal{M}$.

3 Epílogo: a conjectura de Poincaré

3.1 Métricas Riemannianas

Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável $\mathcal{M}$ é uma correspondência que associa a cada ponto de $\mathcal{M}$ um produto interno $\langle , \rangle_p$ (ou seja, uma forma simétrica, positiva definida e bilinear) no espaço tangente $T_p\mathcal{M}$, que varia diferenciávelmente no seguinte sentido: se $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ é um sistema de coordenadas em torno de p com $\phi(p) = q$, então

$$\left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \right\rangle_p = g_{ij}(p)$$

é uma função diferenciável em U. Uma vez que as cartas são difeomorfismos e produtos de difeomorfismos são difeomorfismos, é simples mostrar (usando a regra de transformação de bases para vetores tangentes vista anteriormente) que essa definição não depende da escolha do sistema de coordendas. Quando não há possibilidade de confusão é comum excluir o índice p na função $\langle , \rangle_p$. Em breve provaremos que toda variedade diferenciável possui (pelo menos) uma métrica Riemanniana.

Definição 25. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável. Uma partição da unidade é uma coleção $\{\lambda_i \mid i \in I\}$ de funções suaves $\lambda_i : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ satisfazendo*

1. $0 \leq \lambda_i \leq 1$ *seja qual for $i \in I$.*
2. *A coleção $\{\mathrm{supp}(\lambda_i)\}_{i \in I}$ é localmente finita, ou seja, dado qualquer $x \in \mathcal{M}$ existem no máximo finitos $i \in I$ tais que $x \in \mathrm{supp}(\lambda_i)$.*
3. *Seja qual for $x \in \mathcal{M}$ vale*
$$\sum_{i \in I} \lambda_i(x) = 1$$
(note que pelo item anterior essa soma só possui finitos termos não nulos para cada x).

Dizemos que uma partição da unidade $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ é subordinada a uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ se $\mathrm{supp}(\lambda_i) \subset U_i$ para cada $i \in I$.

Lema 3.1. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável. Então qualquer cobertura aberta de $\mathcal{M}$ possui uma partição da unidade subordinada à ela.*

Demonstração: Veja [4].

■

Teorema 3.2. *Toda variedade diferenciável possui uma métrica Riemanniana.*

Demonstração: Seja $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável, $\{\varphi_i : U_i \to \varphi(U_i)\}$ um atlas para $\mathcal{M}$ e $\{f_i\}$ uma partição da unidade de $\mathcal{M}$ subordinada à cobertura $\{U_i\}$. Cada carta φ_i induz uma métrica em U_i naturalmente: dado $p \in \mathcal{M}$ e vetores tangentes $v, w \in T_p\mathcal{M}$, eles se escrevem em coordenadas com relação à base associada à carta φ_i por

$$v = v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \text{ e } w = w^j \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p$$

E definimos então o produto interno de v e w por

$$\langle v, w\rangle_p^i = v^k w^\ell \delta_{k\ell}$$

O que nos dá então uma métrica em U_i satisfazendo $g^i_{k\ell} = \delta_{k\ell}$. Para globalizar essa métrica, usamos a partição da unidade e definimos

$$\langle v, w\rangle_p = \sum_i f_i(p)\langle v, w\rangle_p^i$$

que está bem definida, claramente simétrica, é diferenciável pois essa soma é finita em uma vizinhança de cada ponto, e define um produto interno em $T_p\mathcal{M}$ por ser uma combinação linear finita de produtos internos.

■

A conjectura de Poincaré é que toda variedade $\mathcal{M}^n$ simplesmente conexa, fechada (compacta e sem bordo) é homeomorfa a $\mathbb{S}^n$. Em dimensão ≤ 2 ela é relativamente fácil de ser demonstrada. Em dimensão ≥ 4, dá muito mais trabalho mas a solução foi conhecida bem antes do caso $n = 3$ ser resolvido, o que incrivelmente aconteceu com técnicas usando fortemente Geometria Riemanniana (e claro, várias outras de análise também).

Referências

[1] Dan Pinponi, *Why is a topology made up of 'open' sets?*

[2] Marcel Berger, *A panoramic view of Riemannian Geometry.*

[3] Roger Penrose, *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe.*

[4] John Lee, *An Introduction to Smooth Manifolds.*

[5] Will Merry, *Lecture Notes on Differential Geometry*.