One chart to rule them all!

É comum na literatura usar o fato de que tensores são *livres de coordenadas* sem explicitar formalmente o que se quer dizer com isso. O propósito principal desse texto é justificar tal frase detalhamente. Antes, estabeleceremos algumas notações e conceitos preliminares importantes:

Notação (N.1). Denotaremos por $\mathbb{V}$ um espaço vetorial real fixado de dimensão finita, digamos $\dim(\mathbb{V}) = n$.

Notação (N.2). $(\mathcal{M}^n, g)$ denota uma variedade Riemanniana fixada de dimensão n, e $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{M})$ denota o espaço de todas as funções reais suaves definidas em $\mathcal{M}$.

Notação (N.3). Seja $\mathcal{M}^n$ uma variedade diferenciável, $\psi : U \subset \mathcal{M} \to V \subset \mathbb{R}^n$ uma carta em torno de um ponto $p \in \mathcal{M}$ arbitrariamente fixado e $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i\right\}_{1\leq i\leq n} \subset \Gamma(TU)$ o referencial local induzido por ψ. Denotaremos por $\{\mathrm{d}x^i\}_{1\leq i\leq n} \subset \Gamma(T^*U)$ o seu co-referencial associado, definido por:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x^i : U &\to T^*U \\ p &\mapsto \mathrm{d}x^i\big|_p : T_p\mathcal{M} \to \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad v \mapsto \mathrm{d}x^i\big|_p(v) = v^i. \end{aligned}$$

para cada $v = \displaystyle\sum_{1\leq i\leq n} v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \in T_p\mathcal{M}$. Equivalentemente,

$$\mathrm{d}x^i\big|_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = \delta^i_j \ \forall p \in U.$$

No caso especial $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ em que temos uma única carta $\varphi = \mathrm{Id}$ e os (co-)referenciais se tornam globais, os denotaremos por

$$\left\{\mathrm{d}r^i\right\}_{1\leq i\leq n} \text{ e } \left\{\frac{\partial}{\partial r^i}\right\}_{1\leq i\leq n},$$

que podem ser naturalmente identificados com a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Note que, por um cálculo muito simples, a diferencial da i-ésima função coordenada da carta ψ (dada por $r^i \circ \psi$, onde $r^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é a projeção na i-ésima coordenada de $\mathbb{R}^n$), coincide com $\mathrm{d}x^i$, *id. est*, $\mathrm{d}x^i = \mathrm{d}\left(r^i \circ \psi\right)$, o que justifica a nossa notação.

Definição (D.1). Um tensor real de tipo (r, s) em $\mathbb{V}$ é uma aplicação multilinear $T : (\mathbb{V}^*)^r \times \mathbb{V}^s \to \mathbb{R}$. O conjunto de tensores reais de tipo (r, s) em $\mathbb{V}$ será denotado por $\mathscr{T}^r_s(\mathbb{V})$.

Definição (D.2). Sejam $\beta = \{\mathbf{e}_i\}_{1\leq i\leq n}$ e $\beta^* = \{\mathbf{e}^i\}_{1\leq i\leq n}$ bases duais de $\mathbb{V}$ e $\mathbb{V}^*$, respectivamente (ou seja, $\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j$ para cada $1 \leq i, j \leq n$). Dado $T \in \mathscr{T}^r_s(\mathbb{V})$, os componentes de T na base β são os números reais definidos por:

$$T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s} \doteq T(\mathbf{e}^{i_1}, \cdots, \mathbf{e}^{i_r}, \mathbf{e}_{j_1}, \cdots, \mathbf{e}_{j_s}),$$

sejam quais forem $1 \leq i_1, \cdots i_r, j_1, \cdots j_s \leq n$.

Observação (O.1). Uma interpretação errônea da frase "tensores são livre de coordenadas" seria dizer que dadas quaisquer duas bases $\{\mathbf{e}_i\}_{1\leq i\leq n}$ e $\{\tilde{\mathbf{e}}_i\}_{1\leq i\leq n}$ e qualquer $T \in \mathscr{T}_s{}^r(\mathbb{V})$, vale que

$$T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s} = T^{\widetilde{i_1}\cdots\widetilde{i_r}}{}_{\widetilde{j_1}\cdots\widetilde{j_s}},$$

sejam quais forem $1 \leq i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s, \widetilde{i_1}, \cdots, \widetilde{i_r}, \widetilde{j_1}\cdots\widetilde{j_r} \leq n$, o que é evidentemente um absurdo! Na verdade, o que acontece é que para provar que dois tensores $T, Q \in \mathscr{T}_s{}^r(\mathbb{V})$ são iguais - ou seja, que vale

$$T(\omega^1, \cdots, \omega^r, v_1, \cdots, v_s) = Q(\omega^1, \cdots, \omega^r, v_1, \cdots, v_s),$$

seja qual for $(\omega^1, \cdots, \omega^r, v_1, \cdots, v_s) \in (\mathbb{V}^*)^r \times \mathbb{V}^s$, é suficiente provar que

$$T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s} = Q^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s},$$

sejam quais forem $1 \leq i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s \leq n$, o que é evidentemente verdadeiro pela multilinearidade de T e Q. Equivalentemente, para definir um tensor $T \in \mathscr{T}_s{}^r(\mathbb{V})$, é suficiente declaramos qual é sua ação em $\{\mathbf{e}^1, \cdots, \mathbf{e}^r, \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_s\}$, ou seja, é suficiente especificarmos os n^{r+s} números reais $\{T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\}$. Quando $r + s = n = 3$, por exemplo, podemos pensar em T como um "cubo" de dimensões n de $3^3 = 27$ números. Portanto, de certa forma tensores são generalizações das matrizes usuais "bi-dimensionais" (equivalentemente, transformações lineares) que já conhecemos.

Como é comum com construções envolvendo somente Álgebra Linear, as considerações acimas podem ser "fibralizadas", num sentido que formalizaremos a seguir.

Definição (D.3). O fibrado (a, b)-tensorial em $\mathcal{M}$ é definido por

$$\mathscr{T}_b{}^a(T\mathcal{M}) \doteq \bigcup_{p\in\mathcal{M}} \mathscr{T}_b{}^a(T_p\mathcal{M}) = \{(p, T) \mid p \in \mathcal{M} \text{ e } T \in \mathscr{T}_b{}^a(T_p\mathcal{M})\}$$

Observação (O.2). Note que $\mathscr{T}_b{}^a(T\mathcal{M})$ é uma variedade diferenciável de dimensão $n + n^{a+b}$. Sua topologia e atlas são induzidos de forma análoga à do fibrado tangente usual. Ou seja, se

$$\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n\}_{\alpha\in I}$$

é um atlas maximal de $\mathcal{M}$ e

$$\begin{aligned} \pi : \mathscr{T}_b{}^a(T\mathcal{M}) &\to \mathcal{M} \\ (p, T) &\mapsto p \end{aligned}$$

denota a projeção natural, definimos um atlas de $\mathscr{T}_b{}^a(T\mathcal{M})$ por

$$\tilde{\mathcal{A}} = \left\{\psi_\alpha : \mathscr{T}_b{}^a(U_\alpha) = \bigcup_{p\in U_\alpha} \mathscr{T}_b{}^a(T_p\mathcal{M}) \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^{n^{a+b}} \subset \mathbb{R}^{n+n^{a+b}}\right\}_{\alpha\in I}$$

onde ψ_α é definida por

$$\begin{aligned} &\psi_\alpha\left(q, \sum_{\substack{1\leq i_1,\ldots,i_b\leq n\\1\leq j_1,\ldots,j_a\leq n}} T^{j_1\ldots j_a}_{i_1\ldots i_b}(q) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{j_1}}\right|_q \otimes \left.\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{j_2}}\right|_q \otimes \ldots \otimes \left.\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{j_a}}\right|_q \otimes \left.\mathrm{d}x_\alpha^{i_1}\right|_q \otimes \left.\mathrm{d}x_\alpha^{i_2}\right|_q \otimes \ldots \otimes \left.\mathrm{d}x_\alpha^{i_b}\right|_q\right) \\ &= \left(\varphi_\alpha(q), \sum_{\substack{1\leq i_1,\ldots,i_b\leq n\\1\leq j_1,\ldots,j_a\leq n}} T^{j_1\ldots j_a}_{i_1\ldots i_b}(q) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial r_\alpha^{j_1}}\right|_q \otimes \left.\frac{\partial}{\partial r_\alpha^{j_2}}\right|_q \otimes \ldots \otimes \left.\frac{\partial}{\partial r_\alpha^{j_a}}\right|_q \otimes \left.\mathrm{d}r_\alpha^{i_1}\right|_q \otimes \left.\mathrm{d}r_\alpha^{i_2}\right|_q \otimes \ldots \otimes \left.\mathrm{d}r_\alpha^{i_b}\right|_q\right) \end{aligned}$$

e declaramos que um subconjunto $O \subset \mathscr{T}_b{}^a(U_\alpha)$ é aberto em $\mathscr{T}_b{}^a(U_\alpha)$ se, e somente se, $\varphi_\alpha(O)$ é aberto em $\varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^{n^{a+b}}$.

Definição (D.4). Diremos que uma seção $T \in \Gamma\left(\mathscr{T}_b^a(T\mathcal{M})\right)$ é um campo tensorial em $\mathcal{M}$.

Observação (O.3). Observe que é comum chamar um campo tensorial simplesmente de um tensor.

A fortiori, quando temos dois tensores (a priori não necessariamente iguais) definidos numa variedade Riemanniana, o fato de tensores poderem (por definição) ser avaliados pontualmente nos garante que para provar a igualdade entre os mesmos basta fixarmos arbitrariamente um ponto $p \in \mathcal{M}^n$, um referencial local conveniente $\{E_i\}_{1\leq i\leq n}$ (que comumente é um referencial geodésico ou um referencial induzido por uma carta local) em torno de p e provarmos que as igualdades entre componentes são satisfeitas. Novamente, isso *não* quer dizer que as componentes independem do referencial fixado: meramente usamos o fato da multilinearidade para garantir que a definição de um tensor por suas componentes é bem definida (em contraste com aplicações não necessariamente multilineares, que não são determinadas por seus valores em bases). Explicitamente, qualquer seção do fibrado $T \in \Gamma\left(\mathscr{T}_b^a\left(T\mathcal{M}\right)\right)$ (comumente chamada simplesmente de um tensor de tipo (a,b) em $\mathcal{M}$) é determinada pelo conhecimento de todas as suas n^{a+b} componentes $\left\{T^{i_1\cdots i_a}{}_{j_1\cdots j_b}\right\} \subset \mathscr{C}^\infty\left(\mathcal{M}\right)$, dadas explicitamentes por

$$\left\{T\left(\mathbf{e}^{(\alpha,i_1)},\ldots,\mathbf{e}^{(\alpha,i_a)},\mathbf{e}_{(\alpha,j_1)},\ldots,\mathbf{e}_{(\alpha,j_b)}\right)\right\}_{\alpha\in I} \subset \mathscr{C}^\infty\left(\mathcal{M}\right),$$

onde

$$\mathbf{e}_{(\alpha,j_k)}(p) = \mathrm{d}\left(\varphi_\alpha^{-1}\right)_{\varphi_\alpha(p)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial r^{j_k}}\right|_{\varphi(p)}\right),$$

e $\left\{\mathbf{e}^{(\alpha,i_\ell)}\right\}_{1\leq\ell\leq n}$ é a base dual associada $\left\{\mathbf{e}^{(\alpha,i_\ell)}\right\}_{1\leq\ell\leq n}$ à base $\left\{\mathbf{e}_{(\alpha,j_k)}\right\}_{1\leq k\leq n}$, determinada por

$$\mathbf{e}^{(\alpha,i_\ell)}\left(\mathbf{e}_{(\alpha,j_k)}\right) = \delta_{j_k}^{i_\ell}.$$

A direção recíproca - ou seja, quando que certas funções reais indexadas sobre um atlas de $\mathcal{M}$ são na verdade componentes tensoriais - é um pouco mais complicada, de forma que não elaboraremos mais sobre ela, mas convém observar que tal problema aparece ao tentar, por exemplo, "globalizar" o método do referencial móvel (para mais detalhes, consulte [5]).

Resumidamente: duas quantidades geométricas tensoriais que coincidem em *um* sistema dado de coordenadas (resp. *um* dado referencial) coincidem em *qualquer* sistema de coordenadas (resp. *qualquer* referencial).

Referências

[1] **Terek, I.** A mini-course on tensors. Texto encontrado em página pessoal. Disponível em: **https://www.asc.ohio-state.edu/terekcouto.1/texts/tensors.pdf**. Acessado em 12 de fevereiro de 2023.

[2] **Josué, R.** Notas de aula de geometria Riemanniana. Texto encontrado em página pessoal. Disponível em: `http://150.164.25.15/~rodney/notas_de_aula/geometria_riemanniana.pdf`. Acessado em 12 de fevereiro de 2023.

[3] **Lee, John M.** Introduction to smooth manifolds. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 218. Springer, New York, 2013. xvi+708 pp. ISBN: 978-1-4419-9981-8.

[4] **Lee, John M.** Introduction to Riemannian manifolds. Second edition of [MR1468735]. Graduate Texts in Mathematics, 176. Springer, Cham, 2018. xiii+437 pp. ISBN: 978-3-319-91754-2; 978-3-319-91755-9.

[5] **Tu, Loring W.** Differential geometry. Connections, curvature, and characteristic classes. Graduate Texts in Mathematics, 275. *Springer, Cham,* 2017. xvi+346 pp. ISBN: 978-3-319-55082-4; 978-3-319-55084-8.

[6] **Horácio, M.A.R.M.** Estimativas de curvatura para sólitons de Ricci gradiente quadridimensionais. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, (2023).