Classificações topológicas reveladas pelo fluxo de Ricci

Matheus Andrade Ribeiro de Moura Horácio

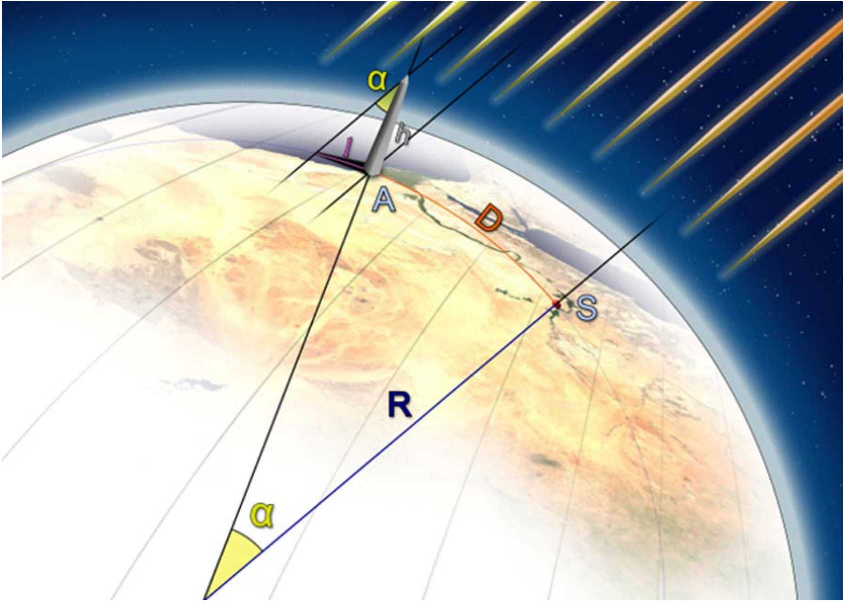
03 de agosto de 2022

Sumário

Eratóstenes: o homem que mediu o mundo

- "Geometria" vem do grego e significa "medir" a Terra. A primeira pessoa que temos registro de fazer isso foi o grande astrônomo e matemático grego Eratóstenes, há mais de 2200 anos.

Eratóstenes: o homem que mediu o mundo



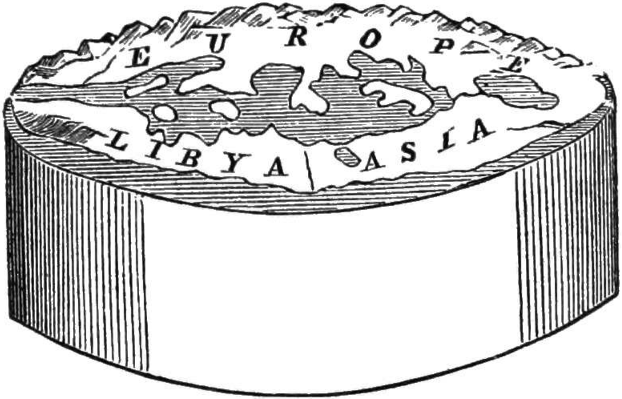
Os primeiros cosmólogos

- A “forma” da Terra, porém, era um assunto de interesse aos antigos gregos séculos antes de Eratóstenes.

Os primeiros cosmólogos

- A "forma" da Terra, porém, era um assunto de interesse aos antigos gregos séculos antes de Eratóstenes.
- Tales de Mileto acreditava que a Terra era um disco plano flutuando num oceano gigante.

- Por outro lado, Anaximandro, discípulo de Tales, pensava que a Terra tinha a forma de um cilindro, onde os continentes estavam localizados numa de suas faces circulares.



Perguntas primordiais

- De modo geral, podemos perguntar quais são todas as formas possíveis que a Terra poderia assumir. Nos limitando somente à perspectiva matemática abstrata (ou seja, sem nos preocuparmos na existência de leis físicas que constituam obstruções à possíveis formatos), tal pergunta admite a seguinte formalização:

Perguntas primordiais

- De modo geral, podemos perguntar quais são todas as formas possíveis que a Terra poderia assumir. Nos limitando somente à perspectiva matemática abstrata (ou seja, sem nos preocuparmos na existência de leis físicas que constituam obstruções à possíveis formatos), tal pergunta admite a seguinte formalização:

Pergunta

Quais são todas as topologias possíveis de uma superfície fechada?

Perguntas primordiais

- De modo geral, podemos perguntar quais são todas as formas possíveis que a Terra poderia assumir. Nos limitando somente à perspectiva matemática abstrata (ou seja, sem nos preocuparmos na existência de leis físicas que constituam obstruções à possíveis formatos), tal pergunta admite a seguinte formalização:

Pergunta

Quais são todas as topologias possíveis de uma superfície fechada?

- Por "fechada", queremos dizer *compacta e sem bordo*.

Perguntas primordiais

- Podemos ir ainda além e indagar:

Perguntas primordiais

- Podemos ir ainda além e indagar:

Pergunta

Qual é a "melhor" métrica que uma superfície fechada qualquer admite?

Perguntas primordiais

- Podemos ir ainda além e indagar:

Pergunta

Qual é a "melhor" métrica que uma superfície fechada qualquer admite?

- Veremos que essas duas perguntas estão intimamente relacionadas.

O Cosmos

- Nas palavras de Carl Sagan, o Cosmos é tudo o que existe, existiu ou existirá.

O Cosmos

- Nas palavras de Carl Sagan, o Cosmos é tudo o que existe, existiu ou existirá.
- A teoria da relatividade geral de Einstein modela o Cosmos como uma variedade pseudo-Riemanniana de dimensão 4, cuja geometria local é descrita pela seguinte equação:

$$\mathrm{Ric} - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Scal} \cdot g + \Lambda g = \frac{8\pi G}{c^4} T$$

O Cosmos

- Sendo assim, podemos muito bem perguntar: dada uma fibração do Cosmos por “fatias temporais” tri-dimensionais, quais são todas as topologias e geometrias possíveis de tais fatias?

- Em dimensão ≤ 3,

$$\text{classificações topológicas} \iff \text{classificações diferenciáveis}$$

Para mais detalhes, consulte [1]. Podemos então reformalizar os problemas anteriores da seguinte maneira:

Observações importantes

Pergunta

Para cada $n \leq 3$, existe um conjunto finito $\mathscr{F}_\tau^n$ de classes de equivalência de variedades diferenciáveis tal que toda variedade diferenciável fechada $\mathcal{M}^n$ satisfaz $[\mathcal{M}] \in \mathscr{F}_\tau$?

Observações importantes

Pergunta

Para cada $n \leq 3$, existe um conjunto finito $\mathscr{F}_\tau^n$ de classes de equivalência de variedades diferenciáveis tal que toda variedade diferenciável fechada $\mathcal{M}^n$ satisfaz $[\mathcal{M}] \in \mathscr{F}_\tau$?

Pergunta

Para cada $n \leq 3$, existe um conjunto finito $\mathscr{F}_g^n$ de classes de equivalência de métricas Riemannianas tal que toda variedade diferenciável fechada admite $g_{\mathcal{M}}$ satisfazendo $[g_{\mathcal{M}}] \in \mathscr{F}_\tau$?

Dimensão 1: curvas

- Qualquer variedade (conexa) de dimensão 1 sem bordo é difeomorfa ou ao círculo $\mathbb{S}^1$ ou à reta real $\mathbb{R}$. A presença de bordo introduz os casos adicionais $[0, 1]$ e $[0, 1)$. Compacidade e a presença de bordo são portanto invariantes topológicos que juntos determinam completamente variedades de dimensão 1.

Dimensão 1: curvas

- Qualquer variedade (conexa) de dimensão 1 sem bordo é difeomorfa ou ao círculo $\mathbb{S}^1$ ou à reta real $\mathbb{R}$. A presença de bordo introduz os casos adicionais $[0, 1]$ e $[0, 1)$. Compacidade e a presença de bordo são portanto invariantes topológicos que juntos determinam completamente variedades de dimensão 1.
- Geometrização em dimensão 1 é portanto trivial. Não existe um invariante geométrico intrínseco que distingua duas variedades quaisquer de dimensão 1.

Dimensão 2: superfícies

- Dadas duas superfícies fechadas $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, existe uma maneira de construir uma superfície nova chamada da *soma conexa* de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, que denotaremos por $\mathcal{M}\sharp\mathcal{N}$.

- Dadas duas superfícies fechadas $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, existe uma maneira de construir uma superfície nova chamada da *soma conexa* de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, que denotaremos por $\mathcal{M}\sharp\mathcal{N}$.
- Escolhemos duas bolas V_1, V_2, em $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ respectivamente, pequenas o suficiente de forma a serem homeomorfas a discos. Em seguida removemos o interior dessas duas bolas, resultando em dois bordos ∂V_1 e ∂V_2 homeomorfos a $\mathbb{S}^2$. Ao identificar esses bordos, obtemos uma nova superfície conexa.

A soma conexa de duas superfícies

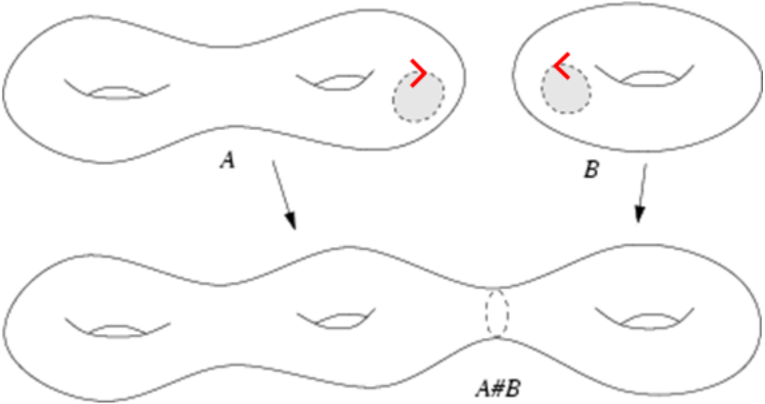


Figura: a soma conexa de um toro com um bi-toro

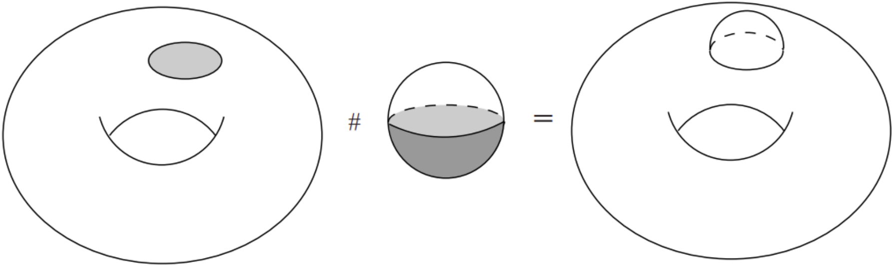


Figura: a soma conexa com uma esfera

Representações poligonais

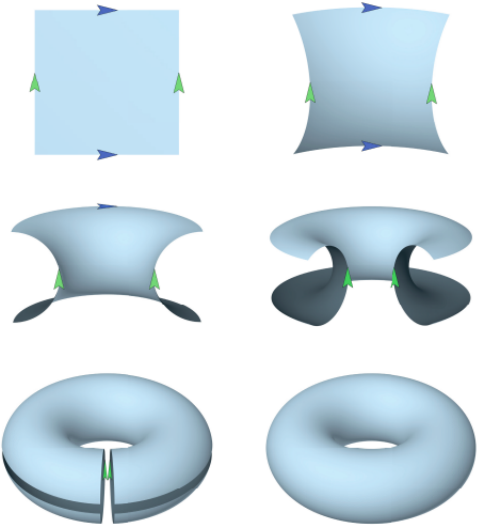
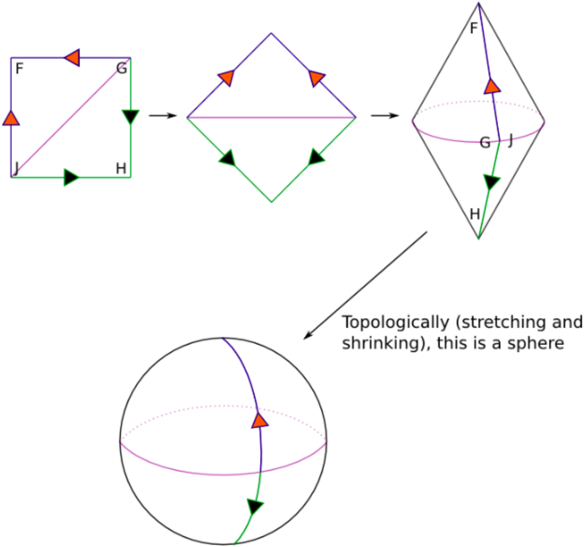
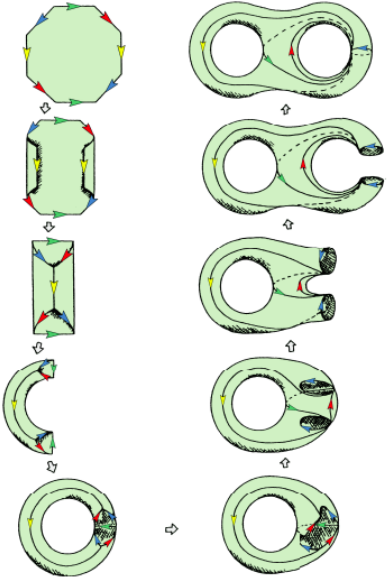


Figura: a representação poligonal de um toro

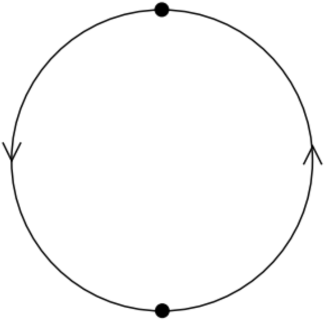
Representações poligonais



Representações poligonais



Representações poligonais


(a)

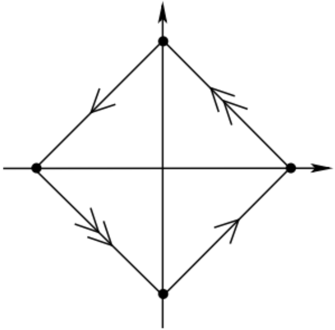

(b)

Figura: representações do plano projetivo $\mathbb{RP}^2$

É possível mostrar que toda superfície compacta admite uma representação polígonal. Em geral, temos também a seguinte:

A classificação de superfícies fechadas

Toda variedade bi-dimensional $\mathcal{M}^2$ conexa e fechada é homeomorfa a exatamente um dos seguintes espaços:

É possível mostrar que toda superfície compacta admite uma representação polígonal. Em geral, temos também a seguinte:

A classificação de superfícies fechadas

Toda variedade bi-dimensional $\mathcal{M}^2$ *conexa e fechada é homeomorfa a exatamente um dos seguintes espaços:*

- *a esfera* $\mathbb{S}^2$

É possível mostrar que toda superfície compacta admite uma representação polígonal. Em geral, temos também a seguinte:

A classificação de superfícies fechadas

Toda variedade bi-dimensional $\mathcal{M}^2$ conexa e fechada é homeomorfa a exatamente um dos seguintes espaços:

- *a esfera* $\mathbb{S}^2$
- *a soma conexa finita de uma ou mais cópias do toro* $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Dimensão 2: superfícies

É possível mostrar que toda superfície compacta admite uma representação polígonal. Em geral, temos também a seguinte:

A classificação de superfícies fechadas

Toda variedade bi-dimensional $\mathcal{M}^2$ conexa e fechada é homeomorfa a exatamente um dos seguintes espaços:

- *a esfera* $\mathbb{S}^2$
- *a soma conexa finita de uma ou mais cópias do toro* $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$
- *a soma conexa finita de uma ou mais cópias do plano projetivo* $\mathbb{RP}^2$

Dimensão 2: superfícies

- O número g de toros presentes na decomposição de $\mathcal{M}$ é chamado do *gênero* de $\mathcal{M}$.

- O número g de toros presentes na decomposição de $\mathcal{M}$ é chamado do *gênero* de $\mathcal{M}$.
- A característica de Euler é um invariante topológico que justifica o "exatamente" citado na classificação anterior. Ela e a orientabilidade são invariantes topológicos que determinam completamente a topologia de uma superfície fechada.

Dimensão 2: superfícies

- O número g de toros presentes na decomposição de $\mathcal{M}$ é chamado do *gênero* de $\mathcal{M}$.
- A característica de Euler é um invariante topológico que justifica o "exatamente" citado na classificação anterior. Ela e a orientabilidade são invariantes topológicos que determinam completamente a topologia de uma superfície fechada.
- Na busca de invariantes topológicos em dimensões mais altas, Poincaré descobriu o grupo fundamental.

E quanto à geometria?

Um dos teoremas fundamentais no estudo de superfícies é o seguinte:

Teorema da uniformização

Toda superfície fechada $\mathcal{M}^2$ admite uma métrica Riemanniana de curvatura seccional constante.

Consequentemente, toda superfície compacta é difeomorfa a exatamente um quociente de uma das três seguintes geometrias modelo: $\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{H}^2$. A topologia e geometria se relacionam pelo teorema de Gauss-Bonnet:

$$\int_{\mathcal{M}^2} K \, \mathrm{d}A = 2\pi \cdot \chi(\mathcal{M}^2)$$

Como uniformizar superfícies com gênero?

- Podemos definir uma métrica de curvatura zero no toro ao "descer" a métrica do recobrimento $\mathbb{R}^2$ ao toro $\mathbb{T}^2$.

Como uniformizar superfícies com gênero?

- Podemos definir uma métrica de curvatura zero no toro ao "descer" a métrica do recobrimento $\mathbb{R}^2$ ao toro $\mathbb{T}^2$.
- E porque não podemos fazer o mesmo para n-toros com $n \geq 2$? A resposta é que os ângulos da geometria Euclidiana são "gordos" demais:

$$(4g-2)\pi > 2\pi \ \forall g \geq 2$$

Como uniformizar superfícies com gênero

- Podemos consertar tal problema ao considerar a geometria hiperbólica. No disco de Poincaré, a soma dos ângulos internos de um polígono hiperbólico é dada por

$$(4g-2)\pi - A$$

onde A denota a área do polígono. Portanto existem polígonos hiperbólicos de ângulos internos $\frac{2\pi}{4g}$, de forma que toda superfície fechada de gênero n admite uma métrica hiperbólica.

Como uniformizar superfícies com gênero

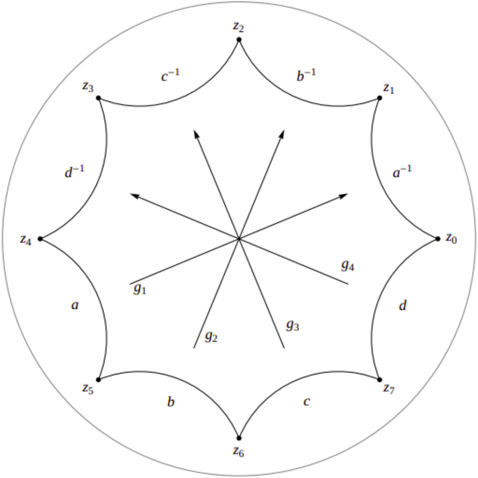


Figura: octágono hiperbólico com identificações rotuladas que geram o bi-toro com geometria hiperbólica

Antes de abordarmos o caso de dimensão 3, vamos tentar visualizar alguns exemplos.

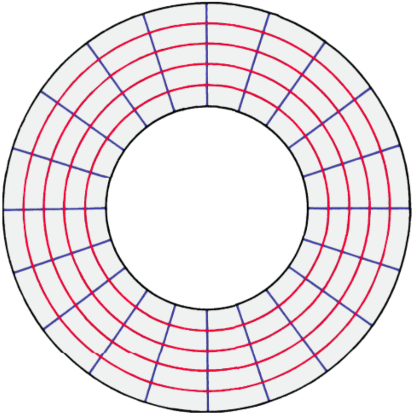


Figura: visualização plana de $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$

Dimensão 3

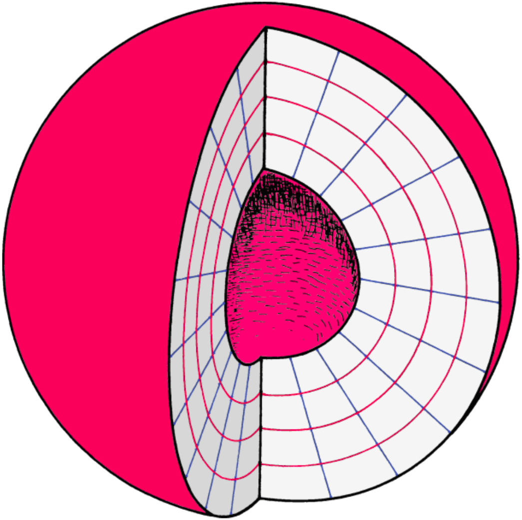


Figura: visualização de $\mathbb{S}^2 \times [0,1]$

Dimensão 3

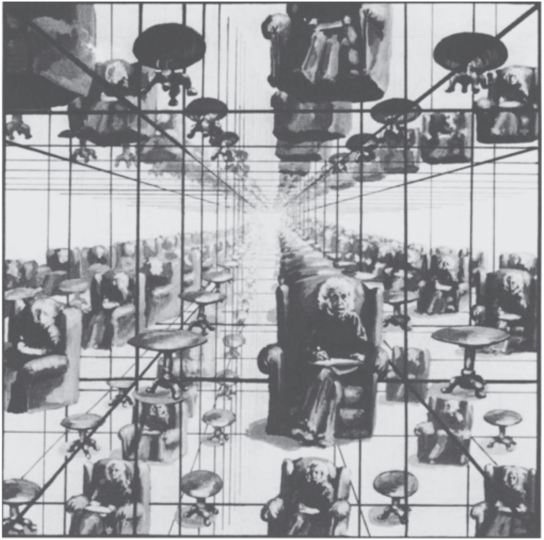


Figura: visão num universo modelado pelo toro $\mathbb{T}^3$

Dimensão 3

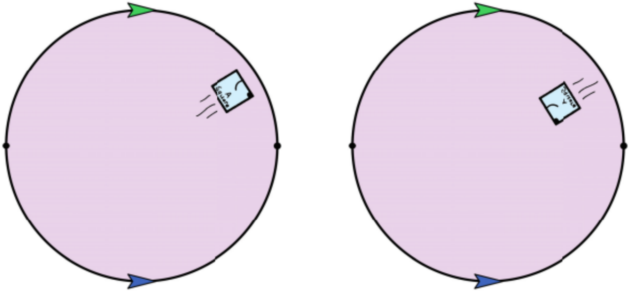


Figura: visualização plana de $\mathbb{S}^2$ como dois discos colados ao longo do bordo $\mathbb{S}^1$

Dimensão 3

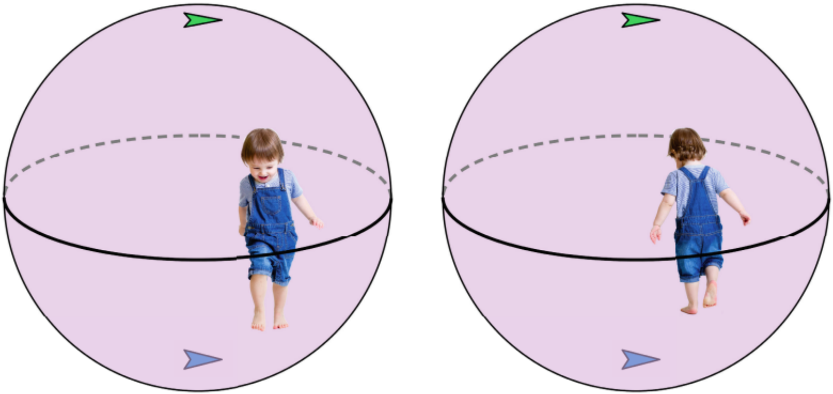


Figura: visualização de $\mathbb{S}^3$ como duas bolas colados ao longo do bordo $\mathbb{S}^2$

Dimensão 3

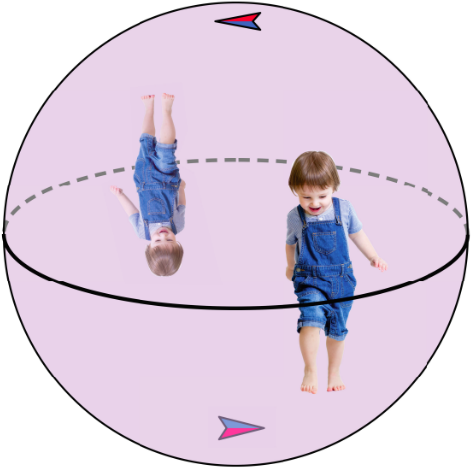


Figura: visualização de $\mathbb{RP}^3$ como a esfera $\mathbb{S}^2$ com pontos antípodas identificados

Dimensão 3

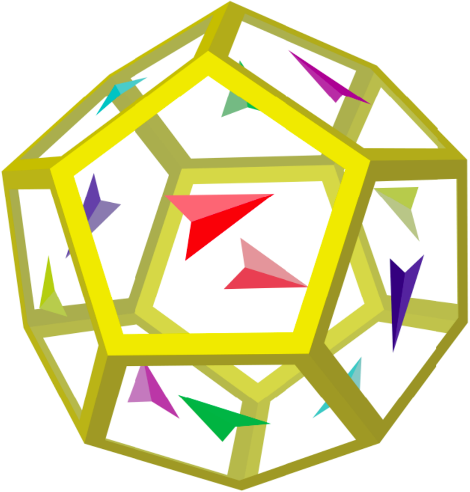


Figura: visualização do dodecaedro de Poincaré

Dimensão 3

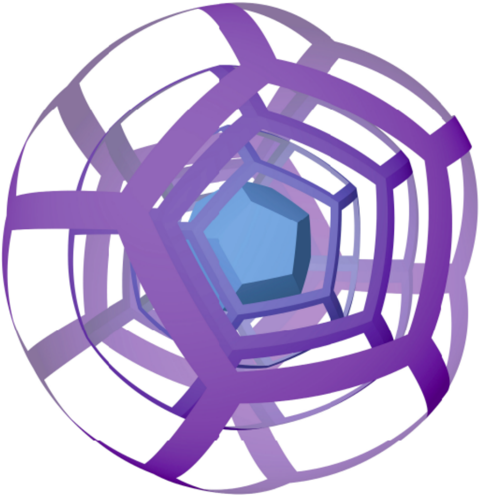


Figura: geometria esférica do dodecaedro de Poincaré

Dimensão 3

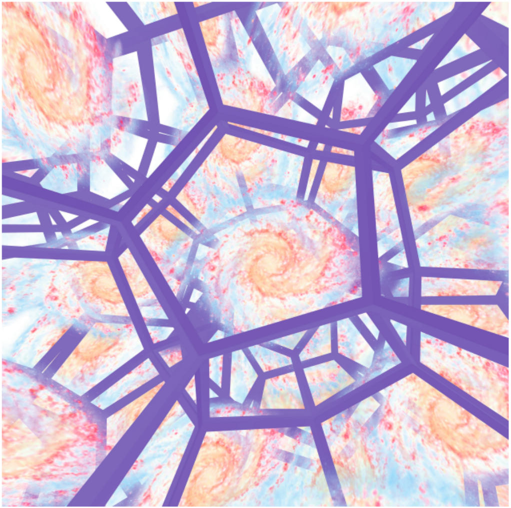


Figura: visão dentro dum universo de uma só galáxia modelado pelo dodecaedro de Poincaré

A conjectura da geometrização de Thurston

- Em dimensão 3, ainda temos as três geometrias-modelo de curvatura constante - a saber, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{H}^3$. Mas não há esperança de uma classificação tão boa quanto em dimensão 2: de fato, existem infinitas variedades tri-dimensionais que não admitem nenhuma métrica de curvatura seccional constante.

A conjectura da geometrização de Thurston

Cinco outras geometrias-modelos surgem de produtos cartesianos ou "torcidos" de geometrias de dimensão mais baixa:

- o produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

Visualizações fiéis tri-dimensionais de tais geometrias são impossíveis. Bastante imaginação de certa forma contorna esse problema, como pode ser visto em **[12]**.

A conjectura da geometrização de Thurston

Cinco outras geometrias-modelos surgem de produtos cartesianos ou "torcidos" de geometrias de dimensão mais baixa:

- o produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$
- o produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Visualizações fiéis tri-dimensionais de tais geometrias são impossíveis. Bastante imaginação de certa forma contorna esse problema, como pode ser visto em **[12]**.

A conjectura da geometrização de Thurston

Cinco outras geometrias-modelos surgem de produtos cartesianos ou "torcidos" de geometrias de dimensão mais baixa:

- o produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$
- o produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$
- o recobrimento universal $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ (um fibrado torcido sobre $\mathbb{H}^2$)

Visualizações fiéis tri-dimensionais de tais geometrias são impossíveis. Bastante imaginação de certa forma contorna esse problema, como pode ser visto em **[12]**.

A conjectura da geometrização de Thurston

Cinco outras geometrias-modelos surgem de produtos cartesianos ou "torcidos" de geometrias de dimensão mais baixa:

- o produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$
- o produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$
- o recobrimento universal $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ (um fibrado torcido sobre $\mathbb{H}^2$)
- o grupo de Heisenberg (um fibrado torcido sobre $\mathbb{R}^2$); e

Visualizações fiéis tri-dimensionais de tais geometrias são impossíveis. Bastante imaginação de certa forma contorna esse problema, como pode ser visto em **[12]**.

A conjectura da geometrização de Thurston

Cinco outras geometrias-modelos surgem de produtos cartesianos ou "torcidos" de geometrias de dimensão mais baixa:

- o produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$
- o produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$
- o recobrimento universal $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ (um fibrado torcido sobre $\mathbb{H}^2$)
- o grupo de Heisenberg (um fibrado torcido sobre $\mathbb{R}^2$); e
- a variedade Sol (um $\mathbb{T}^2$-fibrado torcido sobre $\mathbb{S}^1$)

Visualizações fiéis tri-dimensionais de tais geometrias são impossíveis. Bastante imaginação de certa forma contorna esse problema, como pode ser visto em **[12]**.

- A conjectura da geometrização de Thurston afirma que toda 3-variedade fechada pode ser apropriadamente decomposta de maneira que cada pedaço da decomposição admita uma das geometrias citadas anteriormente. Mais precisamente,

- A conjectura da geometrização de Thurston afirma que toda 3-variedade fechada pode ser apropriadamente decomposta de maneira que cada pedaço da decomposição admita uma das geometrias citadas anteriormente. Mais precisamente,

A conjectura da geometrização de Thurston

Seja $\mathcal{M}^3$ uma variedade fechada, orientável e prima. Então existe um mergulho de uma união disjuntas de toros e garrafas de Klein $\sqcup_i T_i^2 \subset \mathcal{M}$ tal que cada componente do complemento admite uma métrica Riemanniana localmente homogênea e de volume finito.

- Dizemos que uma superfície fechada $S \subset \mathcal{M}^3$ de gênero $g \geq 1$ é incompressível se existe uma injeção de seu grupo fundamental $\pi_1(S)$ no grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{M}^3)$ de $\mathcal{M}^3$.

- Dizemos que uma superfície fechada $S \subset \mathcal{M}^3$ de gênero $g \geq 1$ é incompressível se existe uma injeção de seu grupo fundamental $\pi_1(S)$ no grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{M}^3)$ de $\mathcal{M}^3$.
- Pode-se provar que toros e garrafas de Klein são incompressíveis. Uma reformalização da conjectura é então que existe uma decomposição de $\mathcal{M}^3$ ao longo de toros e garrafas de Klein incompressíveis em pedaços cujos interiores admitem métricas localmente homogêneas de volume finito.

- 3-variedades fechadas de grupo fundamental finito não têm toros ou garrafas de Klein incompressíveis e portanto tal decomposição é trivial. Como a única geometria modelo compacta é $\mathbb{S}^3$, concluímos que se $\pi_1(\mathcal{M}^3)$ é finito então o recobrimento universal de $\mathcal{M}^3$ é a esfera. *A fortiori*,

$$\text{geometrização} \implies \text{conjectura de Poincaré}$$

A conjectura da geometrização de Thurston

- Thurston verificou que uma grande classe de variedades, chamadas *variedades de Haken*, satisfazia sua conjectura.

- Thurston verificou que uma grande classe de variedades, chamadas *variedades de Haken*, satisfazia sua conjectura.
- Tal trabalho foi importantíssimo. Nas palavras de John Morgan,

A conjectura da geometrização de Thurston

- Thurston verificou que uma grande classe de variedades, chamadas *variedades de Haken*, satisfazia sua conjectura.
- Tal trabalho foi importantíssimo. Nas palavras de John Morgan,

A importância do trabalho de Thurston

"*Na minha perspectiva, antes do trabalho de Thurston em* 3*-variedades hiperbólicas e sua formalização da Conjectura da Geometrização, não havia consenso entre os especialistas quanto à validade da conjectura de Poincaré. Depois do trabalho de Thurston (não obstante o fato de que o mesmo não tinha nenhuma consequência direta à Conjectura de Poincaré), se desenvolveu um consenso de que ambas a Conjectura de Poincaré e a Conjectura da Geometrização eram verdadeiras.*"

- Comece com uma 3-variedade fechada arbitrária munida de uma métrica qualquer. Onde a curvatura for grande, deforme a métrica para que a mesma diminua, e onde for pequena, deforme para que aumente. A princípio, o melhor que se pode esperar é que a deformação deixe a variedade inicial com uma geometria "uniforme", de curvatura constante. Mas qual curvatura considerar?

$$\frac{\partial}{\partial t} g = ?$$

O plano de ataque

- Em dimensão 3, Ric determina Rm. É natural então considerar

$$\frac{\partial}{\partial t} g = c \cdot \mathrm{Ric}$$

para alguma constante $c \neq 0$.

O plano de ataque

- Uma vez que

$$\begin{aligned}
-2 \cdot \mathrm{Ric}_{jk} &= -2 \left\{ \mathrm{Rm}^{p}_{pjk} \right\} \\
&= -2 \left\{ \partial_p \Gamma^p_{jk} - \partial_j \Gamma^p_{pk} + \Gamma^q_{jk} \Gamma^p_{pq} - \Gamma^q_{pk} \Gamma^p_{jq} \right\} \\
&= -\partial_p \left\{ g^{pq} \left(\partial_j g_{kq} + \partial_k g_{jq} - \partial_q g_{jk} \right) \right\} \\
&+ \partial_j \left\{ g^{pq} \left(\partial_p g_{kq} + \partial_k g_{pq} - \partial_q g_{kp} \right) \right\} + \left\{ -2 \Gamma^q_{jk} \Gamma^p_{pq} + 2 \Gamma^q_{pk} \Gamma^p_{jq} \right\} \\
&= \cdots \\
&= \Delta g_{jk} + Q \left(\partial g, g^{-1} \right)
\end{aligned}$$

a escolha natural é $c = -2$.

O plano de ataque

- Consideraremos então a equação

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -2 \cdot \mathrm{Ric}_{g(t)}$$

O plano de ataque

- Consideraremos então a equação

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -2 \cdot \mathrm{Ric}_{g(t)}$$

- Hamilton mostrou o sucesso da estratégia descrita anteriormente em dimensão 2. Apesar da sua prova original usar o teorema da uniformização, tal dependência foi removida por Chen-Lu-Tian em **[5]**, de forma que o fluxo pode ser usado para provar o teorema da uniformização.

Exemplos

- Suponha que $(\mathcal{M}, g_0)$ é Einstein, de forma que $\mathrm{Ric}_{ij}(p,0) = \lambda g_{ij}(p,0)$ para todo $p \in \mathcal{M}$, onde λ é uma constante. Fazendo o palpite de que $g_{ij}(x,t) = \rho^2(t) g_{ij}(x,0)$ vemos que $\mathrm{Ric}_{ij}(p,t) = \mathrm{Ric}_{ij}(p,0) = \lambda g_{ij}(p,0)$.

Exemplos

- Suponha que $(\mathcal{M}, g_0)$ é Einstein, de forma que $\mathrm{Ric}_{ij}(p,0) = \lambda g_{ij}(p,0)$ para todo $p \in \mathcal{M}$, onde λ é uma constante. Fazendo o palpite de que $g_{ij}(x,t) = \rho^2(t) g_{ij}(x,0)$ vemos que $\mathrm{Ric}_{ij}(p,t) = \mathrm{Ric}_{ij}(p,0) = \lambda g_{ij}(p,0)$.
- Nesse caso, a equação do fluxo de Ricci se escreve então como:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\rho^2(t) g_{ij}(p,0)\Big) = -2\lambda g_{ij}(x,0)$$

que nos dá a EDO

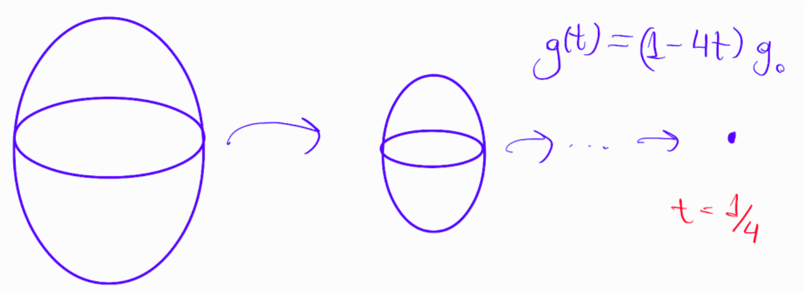
$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\lambda}{\rho}$$

cuja solução é dada por

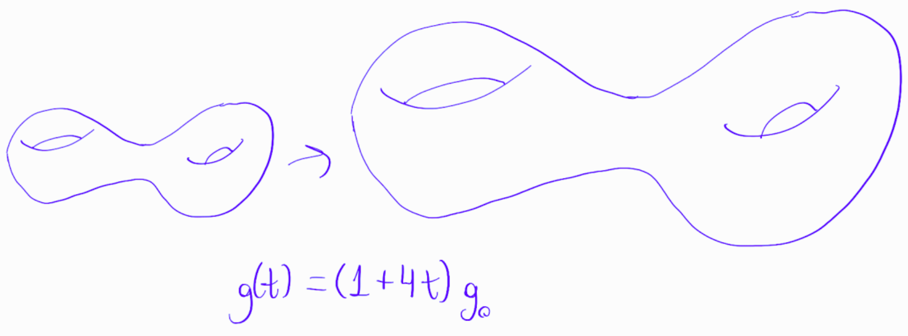
$$\rho^2(t) = 1 - 2\lambda t$$

Exemplos

- Em particular, uma esfera encolhe a um ponto em tempo finito e sua curvatura “explode” perto do tempo de singularidade.



- Por outro lado, em uma variedade $\mathbb{H}^3/\Gamma$ de curvatura negativa constante, o fluxo simplesmente expande a variedade sem nunca "explodir".



Exemplos: os sólitons de Ricci

- Um sóliton de Ricci é uma variedade Riemanniana $(\mathcal{M}, g)$ que admite um campo vetorial X tal que

$$\mathrm{Ric}_g + \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g = \lambda g$$

para alguma constante $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemplos: os sólitons de Ricci

- Um sóliton de Ricci é uma variedade Riemanniana $(\mathcal{M}, g)$ que admite um campo vetorial X tal que
$$\mathrm{Ric}_g + \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g = \lambda g$$
para alguma constante $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Quando existe $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ tal que $X = \nabla f$, tal equação se escreve como
$$\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}(f) = \lambda g$$

Exemplos: os sólitons de Ricci

- Um sóliton de Ricci é uma variedade Riemanniana $(\mathcal{M}, g)$ que admite um campo vetorial X tal que

$$\mathrm{Ric}_g + \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g = \lambda g$$

  para alguma constante $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Quando existe $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ tal que $X = \nabla f$, tal equação se escreve como

$$\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}(f) = \lambda g$$

- Sólitons são soluções autossimilares: sob o fluxo de Ricci, eles encolhem, expandem homoteticamente ou permanecem "firmes" (steady).

- **Existência a curto prazo e unicidade.** Se $(\mathcal{M}, g_0)$ é uma variedade Riemanniana compacta, existe $\varepsilon > 0$ dependendo somente de g_0 e uma única solução $g(t)$ do fluxo de Ricci definida para $t \in [0, \varepsilon)$ com $g(0) = g_0$.

Os primeiros resultados de Hamilton

- **Existência a curto prazo e unicidade.** Se $(\mathcal{M}, g_0)$ é uma variedade Riemanniana compacta, existe $\varepsilon > 0$ dependendo somente de g_0 e uma única solução $g(t)$ do fluxo de Ricci definida para $t \in [0, \varepsilon)$ com $g(0) = g_0$.
- **Caracterização da formação de singularidades pela curvatura.** Se a solução do fluxo existe num intervalo temportal $[0, T)$ mas não se estende a nenhum intervalo maior $[0, T + \delta)$ com $\delta > 0$, então existe um ponto $x \in \mathcal{M}$ tal que o tensor curvatura $\mathrm{Rm}(x, t)$ da métrica $g(t)$ "explode", i.e

$$\lim_{t \to T^-} \left(\sup_{x \in \mathcal{M}} \| \mathrm{Rm}(x, t) \| \right) = \infty$$

Os primeiros resultados de Hamilton

- **Existência a curto prazo e unicidade.** Se $(\mathcal{M}, g_0)$ é uma variedade Riemanniana compacta, existe $\varepsilon > 0$ dependendo somente de g_0 e uma única solução $g(t)$ do fluxo de Ricci definida para $t \in [0, \varepsilon)$ com $g(0) = g_0$.
- **Caracterização da formação de singularidades pela curvatura.** Se a solução do fluxo existe num intervalo temportal $[0, T)$ mas não se estende a nenhum intervalo maior $[0, T + \delta)$ com $\delta > 0$, então existe um ponto $x \in \mathcal{M}$ tal que o tensor curvatura $\mathrm{Rm}(x, t)$ da métrica $g(t)$ "explode", i.e

$$\lim_{t \to T^-} \left(\sup_{x \in \mathcal{M}} \| \mathrm{Rm}(x, t) \| \right) = \infty$$

- A positividade do operador curvatura $\mathrm{Rm} : \Lambda^2(\mathcal{M}) \to \Lambda^2(\mathcal{M})$ é preservada pelo fluxo.

Obstáculos

- A noção de que sob o fluxo a métrica deve "convergir" a uma métrica de curvatura constante precisa ser formalizada.

Obstáculos

- A noção de que sob o fluxo a métrica deve "convergir" a uma métrica de curvatura constante precisa ser formalizada.
- O fluxo pode encontrar singularidades do tipo

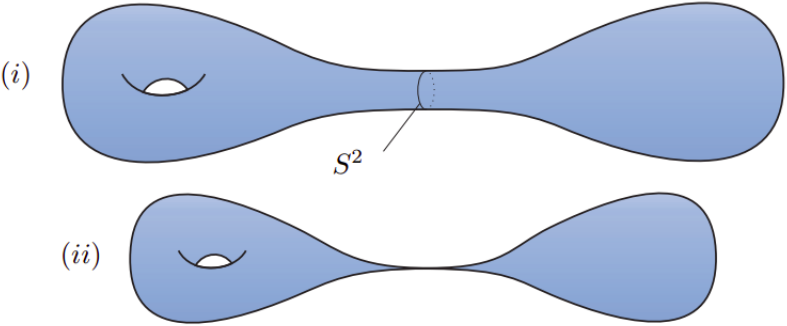


Figure 1.6: Neck pinch

- Para contornar esse problema, Hamilton teve a ideia de fazer “cirurgias” na variedade e logo após retomar o fluxo

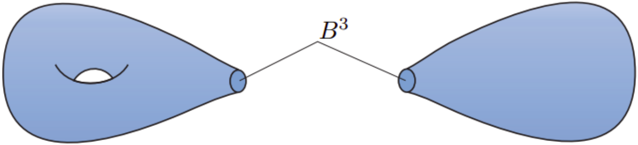


Figure 1.7: Surgery

Obstáculos

- Para contornar esse problema, Hamilton teve a ideia de fazer "cirurgias" na variedade e logo após retomar o fluxo

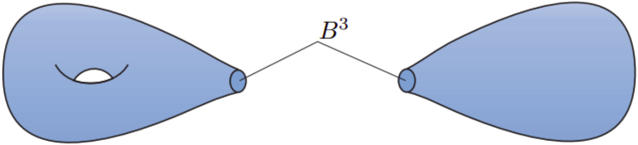


Figure 1.7: Surgery

- Hamilton não conseguiu mostrar que tal processo não fica preso numa situação do tipo do paradoxo de Zeno. Perelman introduziu noções de cirurgia que evitavam tal situação.

O primeiro avanço significativo

- O primeiro indício de que o plano de ataque via o fluxo de Ricci descrito anteriormente era promissor foi o seguinte resultado, obtido originalmente por Hamilton:

O primeiro avanço significativo

- O primeiro indício de que o plano de ataque via o fluxo de Ricci descrito anteriormente era promissor foi o seguinte resultado, obtido originalmente por Hamilton:

Um caso muito particular da conjectura de Poincaré

Seja $\mathcal{M}^3$ uma 3-variedade diferenciável fechada que admite uma métrica Riemanniana de curvatura de Ricci estritamente positiva. Então o recobrimento universal de $\mathcal{M}$ é $\mathbb{S}^3$. Em particular, se $\mathcal{M}$ é simplesmente conexa, então $\mathcal{M}$ é $\mathbb{S}^3$.

O primeiro avanço significativo

- O primeiro indício de que o plano de ataque via o fluxo de Ricci descrito anteriormente era promissor foi o seguinte resultado, obtido originalmente por Hamilton:

Um caso muito particular da conjectura de Poincaré

Seja $\mathcal{M}^3$ uma 3-variedade diferenciável fechada que admite uma métrica Riemanniana de curvatura de Ricci estritamente positiva. Então o recobrimento universal de $\mathcal{M}$ é $\mathbb{S}^3$. Em particular, se $\mathcal{M}$ é simplesmente conexa, então $\mathcal{M}$ é $\mathbb{S}^3$.

- Para abordarmos a demonstração desse resultado, precisaremos de algumas noções preliminares antes. A ideia é evoluir a métrica inicial de forma que a sua curvatura de Ricci seja “pinçada” e convirja a uma métrica de curvatura de Ricci constante.

O primeiro avanço significativo

Usando o princípio do máximo, podemos mostrar o seguinte resultado

“Explosão” uniforme da curvatura

Suponha que $g(t)$ é um fluxo de Ricci numa variedade fechada $\mathcal{M}$, que existe num intervalo $t \in [0, T]$. Se $\mathrm{Scal} \geq \delta > 0$ no instante inicial $t = 0$, então vale que

$$\mathrm{Scal} \geq \frac{\delta}{1 - \left(\frac{2\delta}{n}\right) t}$$

Em particular, se o fluxo é definido em $[0, T)$ e $\mathrm{Scal} \geq \delta > 0$ no instante inicial $t = 0$, então $T \leq \frac{n}{2\delta}$.

A estratégia

Iremos aplicar mudanças de escala (ou “inflações”) na variedade a fim de diminuir a curvatura. A análise do que acontece em tal limite inflacionário nos permitirá identificar a topologia de $\mathcal{M}^3$.

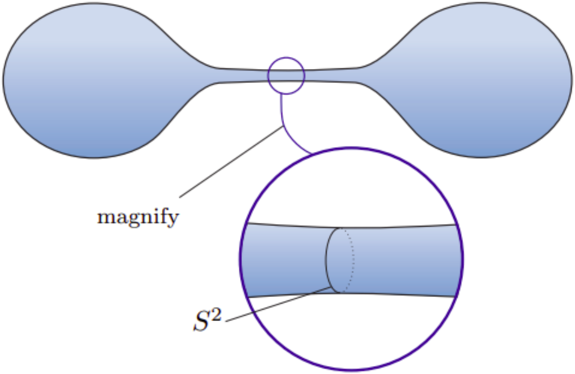


Figure 1.4: Blowing up.

Convergência de variedades

- Uma exaustão de uma variedade $\mathcal{M}$ é uma sequência de abertos $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tais que $\overline{U_k}$ é compacto, $\overline{U_k} \subset U_{k+1}$ $\forall k$ e $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k = \mathcal{M}$.

Convergência de variedades

- Uma exaustão de uma variedade $\mathcal{M}$ é uma sequência de abertos $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tais que $\overline{U_k}$ é compacto, $\overline{U_k} \subset U_{k+1}$ $\forall k$ e $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k = \mathcal{M}$.
- Em particular, se $K \subset \mathcal{M}$ é um subconjunto compacto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset U_n$, seja qual for $n \geq n_0$. Consequentemente, se $\mathcal{M}$ é compacta então $U_n = \mathcal{M}$ para todo n suficientemente grande.

Diremos que uma sequência $(\mathcal{M}_i, g_i, p_i)$ de variedades Riemannianas completas marcadas *converge* (suavemente) à variedade Riemanniana completa e marcada $(\mathcal{M}, g, p)$ conforme $i \to \infty$ se existirem

- uma sequência de compactos $\Omega_i \subset \mathcal{M}$ que exausta $\mathcal{M}$ satisfazendo $p \in \mathrm{int}(\Omega_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$

tais que

$$\phi_i^* g_i \to g$$

suavemente conforme $i \to \infty$, no sentido de que para quaisquer compactos $K \subset \mathcal{M}$, o tensor $\phi_i^* g_i - g$ e todas as suas derivadas covariantes de todas as ordens (com respeito a qualquer conexão inicial fixada) convergem uniformemente a zero em K.

Convergência de variedades

Diremos que uma sequência $(\mathcal{M}_i, g_i, p_i)$ de variedades Riemannianas completas marcadas *converge* (suavemente) à variedade Riemanniana completa e marcada $(\mathcal{M}, g, p)$ conforme $i \to \infty$ se existirem

- uma sequência de compactos $\Omega_i \subset \mathcal{M}$ que exausta $\mathcal{M}$ satisfazendo $p \in \operatorname{int}(\Omega_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$
- uma sequência de aplicações suaves $\phi_i : \Omega_i \to \mathcal{M}_i$ que são difeomorfismos sobre suas imagens e satisfazem $\phi_i(p) = p_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$

tais que

$$\phi_i^* g_i \to g$$

suavemente conforme $i \to \infty$, no sentido de que para quaisquer compactos $K \subset \mathcal{M}$, o tensor $\phi_i^* g_i - g$ e todas as suas derivadas covariantes de todas as ordens (com respeito a qualquer conexão inicial fixada) convergem uniformemente a zero em K.

- Em particular, se $\mathcal{M}$ for compacta, $\mathcal{M}_i$ é difeomorfa a $\mathcal{M}$ (a priori teríamos que $\mathcal{M}$ é difeomorfa somente à sua imagem por ϕ_i, mas como cada ϕ_i é um difeomorfismo e $\mathcal{M}$ é trivialmente simultaneamente aberta e fechada em $\mathcal{M}$, suas imagens são simultaneamente abertas e fechadas em $\mathcal{M}_i$, e portanto no caso em que $\mathcal{M}$ é compacta, $\mathcal{M}$ é difeomorfa a $\mathrm{img}(\phi_i) = \mathcal{M}_i$).

Convergência de variedades

Pode-se provar que duas consequências da convergência $(\mathcal{M}_i, g_i, p_i) \to (\mathcal{M}, g, p)$ são que

- para qualquer $s > 0$ e $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$,

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{B_{g_i}(p_i, s)} \|\nabla^k \mathrm{Rm}(g_i)\| < \infty$$

Convergência de variedades

Pode-se provar que duas consequências da convergência $(\mathcal{M}_i, g_i, p_i) \to (\mathcal{M}, g, p)$ são que

- para qualquer $s > 0$ e $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$,

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{B_{g_i}(p_i, s)} \|\nabla^k \mathrm{Rm}(g_i)\| < \infty$$

-

$$\inf_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{inj}(\mathcal{M}_i, g_i, p_i) > 0$$

Convergência de variedades

Pode-se provar que duas consequências da convergência $(\mathcal{M}_i, g_i, p_i) \to (\mathcal{M}, g, p)$ são que

- para qualquer $s > 0$ e $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$,

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{B_{g_i}(p_i, s)} \|\nabla^k \mathrm{Rm}(g_i)\| < \infty$$

-

$$\inf_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{inj}(\mathcal{M}_i, g_i, p_i) > 0$$

- Na verdade, as condições acima são suficientes para subconvergência.

Convergência de variedades

“Arzelà-Ascoli” para convergência de Cheeger-Gromov

Suponha que $(\mathcal{M}_i, g_i, p_i)$ *é uma sequência de variedades Riemannianas completas e marcadas (todas com a mesma dimensão* n*) satisfazendo as duas condições anteriores. Então existe uma variedade Riemanniana completa e marcada* $(\mathcal{M}, g, p)$ *(também de dimensão* n*) tal que após passar a uma subsequência em* i*,*

$$(\mathcal{M}_i, g_i, p_i) \to (\mathcal{M}, g, p)$$

As seguintes estimativas nos garantem metade do que precisamos para lidar com o caso de curvatura de Ricci inicial positiva:

Estimativas BBS

Suponha que $M > 0$ *é uma constante e que* $g(t)$ *é um fluxo de Ricci numa variedade fechada* $\mathcal{M}^n$*, onde* $t \in [0, M^{-1}]$*. Então para qualquer* $k \in \mathbb{N}$*, existe uma constante* $C = C(n,k)$ *tal que se* $\|\mathrm{Rm}\| \leq M$ *em* $\mathcal{M} \times [0, M^{-1}]$*, então para qualquer* $t \in [0, M^{-1}]$*, vale*

$$\|\nabla^k \mathrm{Rm}\| \leq \frac{CM}{t^{\frac{k}{2}}}$$

A estimativa no raio de injetividade também é satisfeita (veja ?).

Convergência e compacidade de fluxos

- Considere $(\mathcal{M}_i, g_i(t))$ uma sequência de famílias suaves de variedades Riemannianas completas para $t \in (a, b)$, onde $-\infty \leq a < 0 < b \leq \infty$, $p_i \in \mathcal{M}_i$ pontos de $\mathcal{M}_i$ para cada i, $(\mathcal{M}, g(t))$ uma família suave de variedades Riemannianas completas e $p \in \mathcal{M}$ um ponto de $\mathcal{M}$.

- Considere $(\mathcal{M}_i, g_i(t))$ uma sequência de famílias suaves de variedades Riemannianas completas para $t \in (a, b)$, onde $-\infty \leq a < 0 < b \leq \infty$, $p_i \in \mathcal{M}_i$ pontos de $\mathcal{M}_i$ para cada i, $(\mathcal{M}, g(t))$ uma família suave de variedades Riemannianas completas e $p \in \mathcal{M}$ um ponto de $\mathcal{M}$.
- Diremos que
$$(\mathcal{M}_i, g_i(t), p_i) \to (\mathcal{M}, g(t), p)$$
conforme $i \to \infty$ se existirem:

- uma sequência de compactos $\Omega_i \subset \mathcal{M}$ que exausta $\mathcal{M}$ e satisfaz $p \in \mathrm{int}(\Omega_i)$ para cada i

tais que

$$\phi_i^* g_i(t) \to g(t)$$

conforme $i \to \infty$ no sentido de que $\phi_i^* g(t) - g(t)$ e suas derivadas de todas as ordens (onde aqui nos referimos tanto às derivadas com respeito ao tempo quanto às derivadas covariantes espaciais com respeito a qualquer conexão inicial fixada) convergem uniformemente a zero em todo subconjunto compacto de $\mathcal{M} \times (a, b)$.

Convergência e compacidade de fluxos

- uma sequência de compactos $\Omega_i \subset \mathcal{M}$ que exausta $\mathcal{M}$ e satisfaz $p \in \text{int}(\Omega_i)$ para cada i
- uma sequência de aplicações suaves $\phi_i : \Omega_i \to \mathcal{M}_i$ que são difeomorfismos sobre suas imagens e satisfazem $\phi_i(p) = p_i$

tais que

$$\phi_i^* g_i(t) \to g(t)$$

conforme $i \to \infty$ no sentido de que $\phi_i^* g(t) - g(t)$ e suas derivadas de todas as ordens (onde aqui nos referimos tanto às derivadas com respeito ao tempo quanto às derivadas covariantes espaciais com respeito a qualquer conexão inicial fixada) convergem uniformemente a zero em todo subconjunto compacto de $\mathcal{M} \times (a, b)$.

Convergência e compacidade de fluxos

Seja $\mathcal{M}_i$ *uma sequência de variedades de dimensão* n*, e sejam* $p_i \in \mathcal{M}_i$ *pontos de* $\mathcal{M}_i$ *para cada* i*. Suponha que* $g_i(t)$ *é uma sequência de fluxos de Ricci completos em* $\mathcal{M}_i$ *para* $t \in (a,b)$*, onde* $-\infty \leq a < 0 < b \leq \infty$*. Suponha que*

- $$\sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{x \in \mathcal{M}_i \\ t \in (a,b)}} \|\mathrm{Rm}(g_i(t))\|(x) < \infty; \ e$$

Então existe uma variedade $\mathcal{M}$ *de dimensão* n*, um fluxo de Ricci completo* $g(t)$ *em* $\mathcal{M}$ *para* $t \in (a,b)$*, e um ponto* $p \in \mathcal{M}$ *tal que, após passar a uma subsequência em* i*, vale*

$$(\mathcal{M}_i, g_i(t), p_i) \to (\mathcal{M}, g(t), p)$$

conforme $i \to \infty$*.*

Convergência e compacidade de fluxos

Seja $\mathcal{M}_i$ uma sequência de variedades de dimensão n, e sejam $p_i \in \mathcal{M}_i$ pontos de $\mathcal{M}_i$ para cada i. Suponha que $g_i(t)$ é uma sequência de fluxos de Ricci completos em $\mathcal{M}_i$ para $t \in (a, b)$, onde $-\infty \leq a < 0 < b \leq \infty$. Suponha que

- $$\sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{x \in \mathcal{M}_i \\ t \in (a,b)}} \|\mathrm{Rm}(g_i(t))\|(x) < \infty; \ \ e$$

- $$\inf_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{inj}(\mathcal{M}_i, g_i(0), p_i) > 0$$

Então existe uma variedade $\mathcal{M}$ de dimensão n, um fluxo de Ricci completo $g(t)$ em $\mathcal{M}$ para $t \in (a, b)$, e um ponto $p \in \mathcal{M}$ tal que, após passar a uma subsequência em i, vale

$$(\mathcal{M}_i, g_i(t), p_i) \to (\mathcal{M}, g(t), p)$$

conforme $i \to \infty$.

Os limites inflacionários

- Estamos interessados em aplicar os teoremas vistos anteriormente para analisar mudanças de escala de fluxos de Ricci perto de suas singularidades. Seja $(\mathcal{M}, g(t))$ uma solução do fluxo de Ricci com $\mathcal{M}$ fechada no intervalo maximal $[0, T)$. Já vimos que

$$\sup_{x \in \mathcal{M}} \|\mathrm{Rm}\|(x,t) \to \infty$$

conforme $t \uparrow T$.

Os limites inflacionários

- Estamos interessados em aplicar os teoremas vistos anteriormente para analisar mudanças de escala de fluxos de Ricci perto de suas singularidades. Seja $(\mathcal{M}, g(t))$ uma solução do fluxo de Ricci com $\mathcal{M}$ fechada no intervalo maximal $[0, T)$. Já vimos que

$$\sup_{x\in\mathcal{M}} \|\mathrm{Rm}\|(x,t) \to \infty$$

  conforme $t \uparrow T$.

- Tomaremos pontos (p_i, t_i) que maximizem $\|\mathrm{Rm}\|$ no compacto $\mathcal{M} \times \left[0, T - \frac{1}{i}\right]$, ou seja

$$\|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i) = \sup_{\substack{x\in\mathcal{M} \\ t\in[0,t_i]}} \|\mathrm{Rm}\|(x,t)$$

Os limites inflacionários

- Em particular, $\|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i) \to \infty$ conforme $i \to \infty$. Definiremos fluxos re-escalados (e transladados) $g_i(t)$ por

$$g_i(t) = \|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i) g\left(t_i + \frac{t}{\|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i)}\right)$$

Os limites inflacionários

- Em particular, $\|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i) \to \infty$ conforme $i \to \infty$. Definiremos fluxos re-escalados (e transladados) $g_i(t)$ por

$$g_i(t) = \|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i) g \left(t_i + \frac{t}{\|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i)} \right)$$

- Tais fluxos estão definidos nos intervalos

$$-t_i\|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i) \leq t \leq (T - t_i)\|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i)]$$

Além disso, para cada i, temos $\|\mathrm{Rm}_{g_i(0)}\|(p_i) = 1$.

O limite inflacionário de singularidades

Suponha que $\mathcal{M}^n$ *é uma variedade fechada, e* $g(t)$ *é um fluxo de Ricci num intervalo maximal* $[0, T)$ *com* $T < \infty$. *Então existem sequências* $p_i \in \mathcal{M}$ *e* $t_i \uparrow T$ *satisfazendo*

$$\|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i) = \sup_{\substack{x \in \mathcal{M} \\ t \in [0, t_i]}} \|\mathrm{Rm}\|(x, t) \to \infty$$

tais que, definindo

$$g_i(t) = \|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i) g\left(t_i + \frac{t}{\|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i)}\right)$$

existem $b = b(n) > 0$, *um fluxo de Ricci completo* $(\mathcal{N}, \hat{g}(t))$ *definido em* $t \in (-\infty, b)$, *e* $p_\infty \in \mathcal{N}$ *tal que* $(\mathcal{M}, g_i(t), p_i) \to (\mathcal{N}, \hat{g}(t), p_\infty)$ *conforme* $i \to \infty$. *Além disso,* $\|\mathrm{Rm}_{\hat{g}(0)}\|(p_\infty) = 1$, *e* $\|\mathrm{Rm}_{\hat{g}(t)}\| \leq 1$ *seja qual for* $t \leq 0$.

Os tensores de tipo curvatura

Um tensor de tipo curvatura em um espaço vetorial $\mathbb{V}$ é um tensor $R \in \mathscr{T}_4^0(\mathbb{V})$ satisfazendo as simetrias:

- $R(x, y, z, w) = -R(y, x, z, w) = -R(x, y, w, z)$

sejam quais forem $x, y, z, w \in \mathbb{V}$. Denotaremos o espaço vetorial de todos os tensores de tipo curvatura em $\mathbb{V}$ por $\mathscr{R}(\mathbb{V})$.

Os tensores de tipo curvatura

Um tensor de tipo curvatura em um espaço vetorial $\mathbb{V}$ é um tensor $R \in \mathscr{T}_4^0(\mathbb{V})$ satisfazendo as simetrias:

- $R(x, y, z, w) = -R(y, x, z, w) = -R(x, y, w, z)$
- $R(x, y, z, \cdot) + R(y, z, x, \cdot) + R(z, x, y, \cdot) = 0$

sejam quais forem $x, y, z, w \in \mathbb{V}$. Denotaremos o espaço vetorial de todos os tensores de tipo curvatura em $\mathbb{V}$ por $\mathscr{R}(\mathbb{V})$.

Os tensores de tipo curvatura

- Em uma variedade Riemanniana $(\mathcal{M}^n, g)$, definimos o fibrado de tensores de tipo curvatura em $\mathcal{M}^n$ como

$$\mathscr{R}(T\mathcal{M}) \doteq \bigcup_{p\in\mathcal{M}} \mathscr{R}(T_p\mathcal{M})$$

Os tensores de tipo curvatura

- Em uma variedade Riemanniana $(\mathcal{M}^n, g)$, definimos o fibrado de tensores de tipo curvatura em $\mathcal{M}^n$ como

$$\mathscr{R}(T\mathcal{M}) \doteq \bigcup_{p\in\mathcal{M}} \mathscr{R}(T_p\mathcal{M})$$

- Seja $R \in \mathscr{R}(\mathbb{V})$. A *contração de Ricci* de R é o tensor $\mathsf{RICC}(R) \in \mathscr{T}_2^0(\mathbb{V})$ dado por $\mathsf{RICC}(R) \doteq \mathrm{tr}_{1,4}(R)$. A *curvatura escalar* de R é o número $\mathsf{SC}(R) \doteq \mathrm{tr}_{1,2}(\mathsf{RICC}(R))$.

Os tensores de tipo curvatura

- Em uma variedade Riemanniana $(\mathcal{M}^n, g)$, definimos o fibrado de tensores de tipo curvatura em $\mathcal{M}^n$ como

$$\mathscr{R}(T\mathcal{M}) \doteq \bigcup_{p\in\mathcal{M}} \mathscr{R}(T_p\mathcal{M})$$

- Seja $R \in \mathscr{R}(\mathbb{V})$. A *contração de Ricci* de R é o tensor $\mathsf{RICC}(R) \in \mathscr{T}_2^0(\mathbb{V})$ dado por $\mathsf{RICC}(R) \doteq \mathrm{tr}_{1,4}(R)$. A *curvatura escalar* de R é o número $\mathsf{SC}(R) \doteq \mathrm{tr}_{1,2}(\mathsf{RICC}(R))$.
- Seja $R \in \mathscr{R}(\mathbb{V})$. O *tensor de Einstein* de R é o tensor $E(R) \in \mathcal{S}(\mathbb{V})$ definido por

$$E(R) = \mathsf{RICC}(R) - \frac{\mathsf{SC}(R)}{n} g$$

Os tensores de tipo curvatura

- O *tensor de Schouten* de R é $h(R) \in \mathcal{S}(\mathbb{V})$ dado por

$$h(R) = \mathsf{RICC}(R) - \frac{\mathsf{SC}(R)}{2(n-1)}g$$

Os tensores de tipo curvatura

- O *tensor de Schouten* de R é $h(R) \in \mathcal{S}(\mathbb{V})$ dado por

$$h(R) = \mathsf{RICC}(R) - \frac{\mathsf{SC}(R)}{2(n-1)} g$$

- O *tensor de Weyl* de R é $W(R) \in \mathscr{R}(\mathbb{V})$ dado (quando $n > 2$) por

$$W(R) = R - \frac{2}{n-2}(g \owedge h(R))$$

Os tensores de tipo curvatura

- O *tensor de Schouten* de R é $h(R) \in \mathcal{S}(\mathbb{V})$ dado por

$$h(R) = \mathsf{RICC}(R) - \frac{\mathsf{SC}(R)}{2(n-1)} g$$

- O *tensor de Weyl* de R é $W(R) \in \mathscr{R}(\mathbb{V})$ dado (quando $n > 2$) por

$$W(R) = R - \frac{2}{n-2} (g \owedge h(R))$$

- Definiremos também $\mathscr{W}(\mathbb{V}) = \{W \in \mathscr{R}(\mathbb{V}) \mid \mathsf{RICC}(W) = 0\}$.

Notações

- Denotaremos por $\mathcal{S}(\mathbb{V})$ o espaço de todos os tensores simétricos de tipo $(0,2)$ em $\mathbb{V}$.

Notações

- Denotaremos por $\mathcal{S}(\mathbb{V})$ o espaço de todos os tensores simétricos de tipo $(0,2)$ em $\mathbb{V}$.
- Vamos também fixar a notação

$$g \owedge \mathcal{S}(\mathbb{V}) \doteq \{g \owedge T \in \mathscr{R}(\mathbb{V}) \mid T \in \mathcal{S}(\mathbb{V})\}$$

e

$$g \owedge \mathcal{S}(\mathbb{V})_0 \doteq \{g \owedge T \in \mathscr{R}(\mathbb{V}) \mid T \in \mathcal{S}(\mathbb{V}) \text{ satisfaz } \mathrm{tr}_{1,2}(T) = 0\}$$

Decomposição do fibrado de tensores de tipo curvatura

Em geral, temos a seguinte decomposição:

Decompondo tensores de tipo curvatura

Seja $(\mathcal{M}^n, g)$ uma variedade Riemanniana de dimensão n. Então $\mathscr{R}(T\mathcal{M})$ admite a seguinte decomposição ortogonal:

$$\mathscr{R}(T\mathcal{M}) = \mathbb{R}(g \owedge g) \;\oplus\; (g \owedge \mathcal{S}(T\mathcal{M})_0) \;\oplus\; \mathscr{W}(T\mathcal{M})$$

A fortiori, a decomposição explícita do tensor curvatura de $\mathcal{M}$ é dada por:

$$\mathrm{Rm} = \frac{\mathrm{Scal}}{n(n-1)}(g \owedge g) + \frac{2}{n-2}(g \owedge E) + W$$

Determinação de Rm por Ric

- Em geral,

$$\mathrm{Rm} = \frac{\mathrm{Scal}}{n(n-1)}(g \owedge g) + \frac{2}{n-2}(g \owedge E) + W$$

Determinação de Rm por Ric

- Em geral,

$$\mathrm{Rm} = \frac{\mathrm{Scal}}{n(n-1)}(g \owedge g) + \frac{2}{n-2}(g \owedge E) + W$$

- Pela sua construção, o tensor de Weyl tem as mesmas simetrias do tensor de curvatura Riemanniano e todos os seus traços se anulam. Usando tais observações, é simples mostrar que o tensor de Weyl é identicamente nulo em dimensão ≤ 3. Portanto, em dimensão ≤ 3, Ric determina completamente Rm.

O truque de Uhlenbeck

Para cada $x \in \mathcal{M}$, podemos considerar a solução (que é única e existe enquanto o fluxo de Ricci existir) $e_a(x,t)$ do seguinte sistema de 3 EDO's:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} e_a(x,t) &= \mathrm{Ric}_{g(t)}(e_a(x,t)) \\ e_a(x,0) &= e_a^0 \end{aligned}$$

Um cálculo direto mostra que

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t)(e_a(t), e_b(t)) = 0$$

de forma que $\{e_a(t)\}_{1 \le a \le 3}$ permanece um referencial global ortonormal ao longo do fluxo.

O truque de Uhlenbeck

Considere agora o fibrado trivial $F = \mathcal{M} \times \mathbb{R}^3$ com a métrica Euclidiana usual h nas fibras. Temos então isometrias de fibrados

$$\iota(t) : (E, h) \to (T\mathcal{M}, g(t))$$

definidas por

$$\iota(t)(x, \mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)) = \sum_{a=1}^{3} v^a e_a(x, t)$$

Note que $\iota(t)^*(e_a(x,t)) = \mathbf{e}_a$, onde $\{\mathbf{e}_a\}_{1 \leq a \leq 3}$ denota a base Euclidiana usual, e portanto $g(t)(e_a(t), e_b(t)) = h(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b) = \delta_{ab}$.

- Podemos então considerar isomorfismos de fibrados $\iota(t) : E \to T\mathcal{M}$ que resolvem a EDO:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iota(t) = \mathrm{Ric}_{g(t)} \circ \iota(t)$$
$$\iota(0) = \iota_0$$

O truque de Uhlenbeck

- Podemos então considerar isomorfismos de fibrados $\iota(t) : E \to T\mathcal{M}$ que resolvem a EDO:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iota(t) = \mathrm{Ric}_{g(t)} \circ \iota(t)$$
$$\iota(0) = \iota_0$$

- Um cálculo simples mostra que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\iota^* g\right)(X, Y)\right) = 0,\ \forall X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$$

de forma que $(\iota(t))^*(g(t))$ é temporalmente constante e portanto é igual a $\iota^*(g(0))$ enquanto o fluxo existe.

O truque de Uhlenbeck

- No contexto fornecido pelo truque de Uhlenbeck, é possivel mostrar que a equação de evolução do operador curvatura $\mathbb{M}$ associado a Rm se escreve como

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\mathbb{M} = \mathbb{M}^2 + \mathbb{M}^{\#}$$

O truque de Uhlenbeck

- No contexto fornecido pelo truque de Uhlenbeck, é possivel mostrar que a equação de evolução do operador curvatura $\mathbb{M}$ associado a Rm se escreve como

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\mathbb{M} = \mathbb{M}^2 + \mathbb{M}^{\#}$$

- Em dimensão 3, os elementos de $\Lambda^2(\mathcal{M})$ são todos decomponíveis, o que nos dá uma maneira concreta e simples de expressar $\mathbb{M}^2 + \mathbb{M}^{\#}$. Diagonalizando $\mathbb{M}$, id est, escolhendo uma base ortonormal $\{\varphi^\alpha\}$ de $\Lambda^2(\mathcal{M})$ tal que

$$\left(\mathbb{M}\left(\varphi^\alpha, \varphi^\beta\right)\right)_{1\leq\alpha,\beta\leq 3} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

O truque de Uhlenbeck

- onde (sem perda de generalidade) $\lambda \geq \mu \geq \nu$, vemos que a matriz $((\mathbb{M}^2 + \mathbb{M}^{\#})(\varphi^\alpha, \varphi^\beta))_{1 \leq \alpha, \beta \leq 3}$ também é diagonal, e satisfaz

$$((\mathbb{M}^2 + \mathbb{M}^{\#})(\varphi^\alpha, \varphi^\beta))_{1 \leq \alpha, \beta \leq 3} = \begin{pmatrix} \lambda^2 + \mu\nu & 0 & 0 \\ 0 & \mu^2 + \lambda\nu & 0 \\ 0 & 0 & \nu^2 + \lambda\mu \end{pmatrix}$$

O truque de Uhlenbeck

- Podemos também identificar $\mathbb{M}$ com a matriz $(\mathbb{M}_{pq})$ determinada em cada fibra $\Lambda^2(T_x\mathcal{M}^3)$ do fibrado $\Lambda^2(\mathcal{M}^3)$ por

$$\langle \mathrm{Rm}(e_i, e_j)e_k, e_\ell \rangle = \sum_{p,q} \mathbb{M}_{pq} C^p_{ij} C^q_{\ell k}$$

Uma vez que $\lambda = \mathbb{M}_{11}$, $\mu = \mathbb{M}_{22}$ e $\nu = \mathbb{M}_{33}$, temos então

$$\lambda = 2 \cdot \mathrm{Rm}_{2323}$$
$$\mu = 2 \cdot \mathrm{Rm}_{1313}$$
$$\nu = 2 \cdot \mathrm{Rm}_{1212}$$

ou seja, os autovalores correspondem ao dobro das curvaturas seccionais.

- A análise da evolução de $\mathbb{M}$ pode ser feita ao descartarmos o termo do laplaciano, ou seja, ao considerarmos (para cada $x \in \mathcal{M}$ fixado) a EDO para $\mathbf{R}(t) : \Lambda^2(\mathcal{M}) \to \Lambda^2(\mathcal{M})$ definida por

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{R} = \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}^{\#}$$

- A análise da evolução de $\mathbb{M}$ pode ser feita ao descartarmos o termo do laplaciano, ou seja, ao considerarmos (para cada $x \in \mathcal{M}$ fixado) a EDO para $\mathbf{R}(t) : \Lambda^2(\mathcal{M}) \to \Lambda^2(\mathcal{M})$ definida por

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{R} = \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}^{\#}$$

- Denotando os autovalores de $\mathbf{R}$ da mesma maneira que os de $\mathbb{M}$, vemos que tal EDO é equivalente ao sistema

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \lambda^2 + \mu\nu$$
$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \mu^2 + \lambda\nu$$
$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = \nu^2 + \lambda\mu$$

Em particular, $\mathbb{M}(t)$ permanece diagonal.

Além disso, como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lambda - \mu) = (\lambda - \mu)(\lambda + \mu - \nu)$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu - \nu) = (\mu - \nu)(-\lambda + \mu + \nu)$$

a desigualdade $\lambda(0) \geq \mu(0) \geq \nu(0)$ também é preservada, ou seja, $\lambda(t) \geq \mu(t) \geq \nu(t)$. Note também que

$$\mathrm{Ric}_{11} = \mathrm{Rm}_{1212} + \mathrm{Rm}_{1313} = \frac{1}{2}(\mu + \nu)$$
$$\mathrm{Ric}_{22} = \mathrm{Rm}_{2121} + \mathrm{Rm}_{2323} = \frac{1}{2}(\lambda + \nu)$$
$$\mathrm{Ric}_{33} = \mathrm{Rm}_{3232} + \mathrm{Rm}_{3131} = \frac{1}{2}(\lambda + \mu)$$

Portanto

$$\mathrm{Ric} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mu+\nu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+\nu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+\mu \end{pmatrix}$$

donde vem também

$$\mathrm{Scal} = \mathrm{tr}(\mathrm{Ric}) = \lambda+\mu+\nu$$

Pinçamento dos auto-valores

Controle em dimensão 3

Para quaisquer constantes $0 < \beta < B < \infty$ *constantes tais que*

$$\beta g(0) \leq \mathrm{Ric}_{g(0)} \leq B g(0)$$

existem constantes $A = A(\beta, B) > 0$ *e* $\theta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ *tal que*

$$\lambda - \nu \leq A(\lambda + \mu)^{\theta}$$

e tal desigualdade é preservada pelo fluxo de Ricci.

“Arredondamento” em dimensão 3

Controle da curvatura

Para quaisquer constantes $0 < \beta < B < \infty$ *tais que*

$$\beta g_0 \leq \mathrm{Ric}_{g(0)} \leq B g_0$$

e para qualquer $\varepsilon > 0$, *existe uma constante* $C_\varepsilon = C(\beta, B, \varepsilon)$ *tal que*

$$\left\| \mathrm{Ric} - \frac{1}{3}\mathrm{Scal} \cdot g \right\|_{g(t)} \leq \varepsilon \cdot \mathrm{Scal}_{g(t)} + C_\varepsilon$$

A primeira classificação em dimensão 3

Seja $(\mathcal{M}^3, g_0)$ uma 3-variedade Riemanniana com curvatura de Ricci positiva. Então o fluxo de Ricci $g(t)$ de $\mathcal{M}$ definido num intervalo maximal $[0, T)$ se arredonda no seguinte sentido: existem

- uma métrica g_∞ em $\mathcal{M}$ de curvatura seccional constante e positiva,

tal que ao definirmos novos fluxos de Ricci $g_i(t)$ para $t \leq 0$ por

$$g_i(t) = \|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i) \cdot g\left(t_i + \frac{t}{\|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i)}\right)$$

então

$$(\mathcal{M}, g_i(t), p_i) \to (\mathcal{M}, (c - t)g_\infty, p_\infty)$$

A primeira classificação em dimensão 3

Seja $(\mathcal{M}^3, g_0)$ uma 3-variedade Riemanniana com curvatura de Ricci positiva. Então o fluxo de Ricci $g(t)$ de $\mathcal{M}$ definido num intervalo maximal $[0, T)$ se arredonda no seguinte sentido: existem

- uma métrica g_∞ em $\mathcal{M}$ de curvatura seccional constante e positiva,
- uma sequência $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $t_i \uparrow T$,

tal que ao definirmos novos fluxos de Ricci $g_i(t)$ para $t \leq 0$ por

$$g_i(t) = \|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i) \cdot g\left(t_i + \frac{t}{\|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i)}\right)$$

então

$$(\mathcal{M}, g_i(t), p_i) \to (\mathcal{M}, (c-t)g_\infty, p_\infty)$$

A primeira classificação em dimensão 3

Seja $(\mathcal{M}^3, g_0)$ uma 3-variedade Riemanniana com curvatura de Ricci positiva. Então o fluxo de Ricci $g(t)$ de $\mathcal{M}$ definido num intervalo maximal $[0, T)$ se arredonda no seguinte sentido: existem

- uma métrica g_∞ em $\mathcal{M}$ de curvatura seccional constante e positiva,
- uma sequência $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $t_i \uparrow T$,
- um ponto $p_\infty \in \mathcal{M}$ e uma sequência $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$,

tal que ao definirmos novos fluxos de Ricci $g_i(t)$ para $t \leq 0$ por

$$g_i(t) = \|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i) \cdot g\left(t_i + \frac{t}{\|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i)}\right)$$

então

$$(\mathcal{M}, g_i(t), p_i) \to (\mathcal{M}, (c - t)g_\infty, p_\infty)$$

Demonstração

- Usando os teoremas vistos anteriormente, obtemos uma constante $b > 0$, sequências $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, $\{t_i \uparrow T\}_{i\in\mathbb{N}}$, fluxos por mudanças de escalas $g_i(t)$ e (para $t \in (-\infty, b)$) um limite do fluxo de Ricci $(\mathcal{N}, \hat{g}(t))$ com um ponto base $p_\infty \in \mathcal{N}$. Como também já vimos, para quaisquer $t \in [0, T)$ e $\varepsilon > 0$, vale

$$\left\| \mathrm{Ric} - \frac{1}{3}\mathrm{Scal} \cdot g \right\|_{g(t)} \leq \varepsilon \cdot \mathrm{Scal}_{g(t)} + C_\varepsilon$$

Demonstração

- Usando os teoremas vistos anteriormente, obtemos uma constante $b > 0$, sequências $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, $\{t_i \uparrow T\}_{i\in\mathbb{N}}$, fluxos por mudanças de escalas $g_i(t)$ e (para $t \in (-\infty, b)$) um limite do fluxo de Ricci $(\mathcal{N}, \hat{g}(t))$ com um ponto base $p_\infty \in \mathcal{N}$. Como também já vimos, para quaisquer $t \in [0, T)$ e $\varepsilon > 0$, vale

$$\left\| \mathrm{Ric} - \frac{1}{3}\mathrm{Scal} \cdot g \right\|_{g(t)} \leq \varepsilon \cdot \mathrm{Scal}_{g(t)} + C_\varepsilon$$

- Uma vez que $g_i(t)$ difere de $g(t)$ somente por uma translação temporal e uma mudança de escala, então com respeito a $g_i(0)$ vale que

$$\left\| \mathrm{Ric} - \frac{1}{3}\mathrm{Scal} \cdot g_i(0) \right\|_{g_i(0)} \leq \varepsilon \cdot \mathrm{Scal}_{g_i(0)} + \frac{C_\varepsilon}{\|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i)}$$

Demonstração

- Fazendo $i \to \infty$, obtemos

$$\left\| \mathrm{Ric} - \frac{1}{3}\mathrm{Scal} \cdot g_i(0) \right\|_{\hat{g}(0)} \leq \varepsilon \cdot \mathrm{Scal}_{\hat{g}(0)}$$

Demonstração

- Fazendo $i \to \infty$, obtemos

$$\left\| \mathrm{Ric} - \frac{1}{3}\mathrm{Scal} \cdot g_i(0) \right\|_{\hat{g}(0)} \leq \varepsilon \cdot \mathrm{Scal}_{\hat{g}(0)}$$

- Segue da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$ que

$$\mathrm{Ric}_{\hat{g}(0)} - \frac{1}{3}\mathrm{Scal}_{\hat{g}(0)} \cdot \hat{g}(0) \equiv 0$$

e portanto $(\mathcal{N}, \hat{g}(0))$ é uma variedade de Einstein, de forma que $\mathrm{Scal}_{\hat{g}(0)}$ é constante.

Demonstração

- Como $\dim(\mathcal{M}) = 3$, segue que $\hat{g}(0)$ tem curvatura seccional constante.

Demonstração

- Como $\dim(\mathcal{M}) = 3$, segue que $\hat{g}(0)$ tem curvatura seccional constante.
- Uma vez que $\mathrm{Scal}_{g(t)} > 0$, segue que $\mathrm{Scal}_{g_i(t)} > 0$ e portanto $\mathrm{Scal}_{\hat{g}(0)} \geq 0$.

Demonstração

- Como $\dim(\mathcal{M}) = 3$, segue que $\hat{g}(0)$ tem curvatura seccional constante.
- Uma vez que $\mathrm{Scal}_{g(t)} > 0$, segue que $\mathrm{Scal}_{g_i(t)} > 0$ e portanto $\mathrm{Scal}_{\hat{g}(0)} \geq 0$.
- Vemos então que o valor constante que a curvatura seccional de $\hat{g}(0)$ assume é não-negativo. Mas lembrando que $\|\mathrm{Rm}(\hat{g}(0))\|(p_\infty) = 1$, concluímos que na verdade $\hat{g}(0)$ é uma métrica de curvatura seccional estritamente positiva e constante.

Demonstração

- Pelo teorema de Bonnet-Myers, segue que $\mathcal{N}$ é uma variedade fechada. Como já vimos anteriormente, $\mathcal{N}$ é então difeomorfa a $\mathcal{M}$.

Demonstração

- Pelo teorema de Bonnet-Myers, segue que $\mathcal{N}$ é uma variedade fechada. Como já vimos anteriormente, $\mathcal{N}$ é então difeomorfa a $\mathcal{M}$.
- Pela unicidade do fluxo, vemos que $\hat{g}(t) = (c - t)g_\infty$, onde g_∞ é um múltiplo positivo de $\hat{g}(0)$ e $c > 0$ é uma constante. Portanto

  $$(\mathcal{M}, g_i(t), p_i) \to (\mathcal{M}, (c - t)g_\infty, p_\infty)$$

  como queríamos mostrar.

Os operadores de curvatura

- Qualquer tensor P de curvatura de tipo $(0,4)$ determina uma forma bilinear

$$\widetilde{P} : \Lambda^2(\mathcal{M}) \times \Lambda^2(\mathcal{M}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$$

ao exigir que localmente $\widetilde{P}\left(\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j, \mathbf{e}^k \wedge \mathbf{e}^\ell\right) = P_{ij\ell k}$.

- Qualquer tensor P de curvatura de tipo $(0,4)$ determina uma forma bilinear

$$\widetilde{P} : \Lambda^2(\mathcal{M}) \times \Lambda^2(\mathcal{M}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$$

ao exigir que localmente $\widetilde{P}\left(\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j, \mathbf{e}^k \wedge \mathbf{e}^\ell\right) = P_{ij\ell k}$.

- Usando a multi-linearidade, podemos determinar $\widetilde{P}$ em todo $\Lambda^2(\mathcal{M}) \times \Lambda^2(\mathcal{M})$ usando tal relação

Os operadores de curvatura

- Qualquer tensor P de curvatura de tipo $(0,4)$ determina uma forma bilinear

$$\widetilde{P} : \Lambda^2(\mathcal{M}) \times \Lambda^2(\mathcal{M}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$$

  ao exigir que localmente $\widetilde{P}\left(\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j, \mathbf{e}^k \wedge \mathbf{e}^\ell\right) = P_{ij\ell k}$.
- Usando a multi-linearidade, podemos determinar $\widetilde{P}$ em todo $\Lambda^2(\mathcal{M}) \times \Lambda^2(\mathcal{M})$ usando tal relação
- Equivalentemente, podemos exigir que para quaisquer $x, y, v, w \in T_p\mathcal{M}$ valha $\widetilde{P}(x \wedge y, v \wedge w) = P(x, y, w, v)$, com $p \in \mathcal{M}$ arbitrário).

Os operadores de curvatura

- Equivalentemente, a relação:

$$g(\widehat{P}(x \wedge y), v \wedge w) = \widetilde{P}(x \wedge y, v \wedge w)\ \forall x, y, v, w \in T_p\mathcal{M},\ \forall p \in \mathcal{M}$$

determina também um operador $\widehat{P} : \Lambda^2(\mathcal{M}) \to \Lambda^2(\mathcal{M})$. É simples verificar que $\widehat{P}$ está bem definido (ou seja, $P(\omega) \in \Lambda^2(\mathcal{M})$ para cada $\omega \in \Lambda^2(\mathcal{M})$).

Dimensão 4

Decomposição pela estrela de Hodge

Seja $(\mathcal{M}^4, g)$ *uma variedade Riemanniana orientada de dimensão* 4*. Então o fibrado* $\Lambda^2(\mathcal{M})$ *das* 2*-formas em* $\mathcal{M}$ *admite a seguinte decomposição de autofibrados* $\star$*-invariantes:*

$$\Lambda^2(\mathcal{M}) = \Lambda^2_+(\mathcal{M}) \oplus \Lambda^2_-(\mathcal{M})$$

onde $\Lambda^2_\pm(\mathcal{M}) = \{\omega \in \Lambda^2(\mathcal{M}) \mid \star\,\omega = \pm\omega\}$.

Dimensão 4

- De fato, em dimensão 4 vale $\star^2 = \star \circ \star = \mathrm{Id}$. Portanto um autovalor de $\star$ é necessariamente ± 1. Note também que dada $\omega \in \Lambda^2(\mathcal{M})$, definindo as 2-formas:

$$\omega^+ = \frac{1}{2}(\omega + \star\omega) \in \Lambda^2_+(\mathcal{M})$$

e

$$\omega^- = \frac{1}{2}(\omega - \star\omega) \in \Lambda^2_-(\mathcal{M})$$

Temos $\omega = \omega^+ + \omega^-$. Finalmente, é óbvio que $\Lambda^2_+(\mathcal{M}) \cap \Lambda^2_-(\mathcal{M}) = \{0\}$, donde segue o resultado desejado.

- De fato, em dimensão 4 vale $\star^2 = \star \circ \star = \mathrm{Id}$. Portanto um autovalor de $\star$ é necessariamente ± 1. Note também que dada $\omega \in \Lambda^2(\mathcal{M})$, definindo as 2-formas:

$$\omega^+ = \frac{1}{2}(\omega + \star\omega) \in \Lambda^2_+(\mathcal{M})$$

e

$$\omega^- = \frac{1}{2}(\omega - \star\omega) \in \Lambda^2_-(\mathcal{M})$$

Temos $\omega = \omega^+ + \omega^-$. Finalmente, é óbvio que $\Lambda^2_+(\mathcal{M}) \cap \Lambda^2_-(\mathcal{M}) = \{0\}$, donde segue o resultado desejado.
- Elementos de $\Lambda^2_+(\mathcal{M})$ são chamados de auto-duais, enquanto que elementos de $\Lambda^2_-(\mathcal{M})$ são chamados de anti-auto-duais.

Decomposição de Rm

A decomposição em blocos correspondente à decomposição de $\Lambda^2(\mathcal{M})$ via a estrela de Hodge $\star$ do operador de curvatura é dada por

$$\mathrm{Rm} = \left(\begin{array}{c|c} \left(\mathcal{W}^+ + \frac{\mathcal{S}}{12}\right)\Big|_{\Lambda^2_+(\mathcal{M})} & \mathcal{E}\big|_{\Lambda^2_-(\mathcal{M})} \\ \hline \mathcal{E}\big|_{\Lambda^2_+(\mathcal{M})} & \left(\mathcal{W}^- + \frac{\mathcal{S}}{12}\right)\Big|_{\Lambda^2_-(\mathcal{M})} \end{array}\right)$$

Dimensão 4

- Após mudanças de escalas apropriadas, a mesma estratégia utilizada em dimensão 3 pode ser usada para mostrar que uma 4-variedade fechada $\mathcal{M}^4$ admite uma métrica g_∞ cujo operador de curvatura é dado por

$$\mathrm{Rm} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & 2 \cdot \mathrm{Id} \end{pmatrix}$$

Em particular, Rm é um múltiplo de $g \owedge g$ e portanto $\mathcal{M}^4$ tem curvatura seccional constante. Em dimensão par as únicas tais variedades são esferas e espaços projetivos.

- Hamilton conjecturou que variedades fechadas de qualquer dimensão com operador de curvatura positivo são formas espaciais. Em [6], Bohm e Wiliking confirmaram tal conjectura.

Sonhos mais altos

- Hamilton conjecturou que variedades fechadas de qualquer dimensão com operador de curvatura positivo são formas espaciais. Em [6], Bohm e Wiliking confirmaram tal conjectura.
- Em 1926, Hopf propôs o seguinte problema:

Em 2007, Simon Brendle e Richard Schoen usaram o fluxo de Ricci para provar que sim.

Sonhos mais altos

- Hamilton conjecturou que variedades fechadas de qualquer dimensão com operador de curvatura positivo são formas espaciais. Em [6], Bohm e Wiliking confirmaram tal conjectura.
- Em 1926, Hopf propôs o seguinte problema:

Teorema da esfera diferenciável

É verdade que toda variedade Riemanniana com curvaturas seccionais contidas no intervalo $\left(\frac{1}{4}, 1\right]$ é difeomorfa a uma esfera?

Em 2007, Simon Brendle e Richard Schoen usaram o fluxo de Ricci para provar que sim.

Referências

[1] mathoverflow
Classification of surfaces and the TOP, DIFF and PL categories for manifolds

Referências

[1] mathoverflow
Classification of surfaces and the TOP, DIFF and PL categories for manifolds

[3] B. Chow et al
Hamilton's Ricci Flow

Referências

[1] mathoverflow
Classification of surfaces and the TOP, DIFF and PL categories for manifolds

[3] B. Chow et al
Hamilton's Ricci Flow

[4] John W. Morgan
Recent Progress on the Poincaré Conjecture and the Classification of 3-Manifolds

Referências

[1] mathoverflow
Classification of surfaces and the TOP, DIFF and PL categories for manifolds

[3] B. Chow et al
Hamilton's Ricci Flow

[4] John W. Morgan
Recent Progress on the Poincaré Conjecture and the Classification of 3-Manifolds

[5] **Chen, Xiuxiong; Lu, Peng; Tian, Gang.** A note on uniformization of Riemann surfaces by Ricci flow. *Proc. Amer. Math. Soc.* **134** (2006), no. 11, 3391–3393. MR2231924

Referências

[1] mathoverflow
Classification of surfaces and the TOP, DIFF and PL categories for manifolds

[3] B. Chow et al
Hamilton's Ricci Flow

[4] John W. Morgan
Recent Progress on the Poincaré Conjecture and the Classification of 3-Manifolds

[5] **Chen, Xiuxiong; Lu, Peng; Tian, Gang.** A note on uniformization of Riemann surfaces by Ricci flow. *Proc. Amer. Math. Soc.* **134** (2006), no. 11, 3391–3393. MR2231924

[6] **Böhm, Christoph; Wilking, Burkhard.** Manifolds with positive curvature operators are space forms. Ann. of Math. (2) **167** (2008), no. 3, 1079–1097. MR2415394

Referências

[7] P. M. Topping, *Lectures on the Ricci flow.* L.M.S. Lecture note series **325** C.U.P. (2006) **http://www.warwick.ac.uk/ maseq/RFnotes.html**

Referências

[7] P. M. Topping, *Lectures on the Ricci flow.* L.M.S. Lecture note series **325** C.U.P. (2006) **http://www.warwick.ac.uk/ maseq/RFnotes.html**

[8] Huai-Dong Cao, Xi-Ping Zhu. ***A Complete Proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures - application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow.*** Asian Journal of Mathematics, 10(2) 165-492 Junho de 2006.

Referências

[7] P. M. Topping, *Lectures on the Ricci flow.* L.M.S. Lecture note series **325** C.U.P. (2006) **http://www.warwick.ac.uk/ maseq/RFnotes.html**

[8] Huai-Dong Cao, Xi-Ping Zhu. ***A Complete Proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures - application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow.*** Asian Journal of Mathematics, 10(2) 165-492 Junho de 2006.

[9] Bennet Chow, Dan. Knopf. *The Ricci Flow: An Introduction.* American Mathematical Society, 2004.

Referências

[7] P. M. Topping, *Lectures on the Ricci flow.* L.M.S. Lecture note series **325** C.U.P. (2006) **http://www.warwick.ac.uk/ maseq/RFnotes.html**

[8] Huai-Dong Cao, Xi-Ping Zhu. ***A Complete Proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures - application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow.*** Asian Journal of Mathematics, 10(2) 165-492 Junho de 2006.

[9] Bennet Chow, Dan. Knopf. *The Ricci Flow: An Introduction.* American Mathematical Society, 2004.

[10] R. Hamilton. ***Three-Manifolds with Positive Ricci Curvature.*** Journal of Differential Geometry 17 (1982), pp. 255–306.

Referências

[7] P. M. Topping, *Lectures on the Ricci flow.* L.M.S. Lecture note series **325** C.U.P. (2006) **http://www.warwick.ac.uk/ maseq/RFnotes.html**

[8] Huai-Dong Cao, Xi-Ping Zhu. ***A Complete Proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures - application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow.*** Asian Journal of Mathematics, 10(2) 165-492 Junho de 2006.

[9] Bennet Chow, Dan. Knopf. *The Ricci Flow: An Introduction.* American Mathematical Society, 2004.

[10] R. Hamilton. ***Three-Manifolds with Positive Ricci Curvature.*** Journal of Differential Geometry 17 (1982), pp. 255–306.

[11] R. Hamilton. ***Four-Manifolds with Positive Curvature Operator.*** Journal of Differential Geometry 24 (1986), pp. 153–179

Referências

[7] P. M. Topping, *Lectures on the Ricci flow.* L.M.S. Lecture note series **325** C.U.P. (2006) **http://www.warwick.ac.uk/ maseq/RFnotes.html**

[8] Huai-Dong Cao, Xi-Ping Zhu. ***A Complete Proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures - application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow.*** Asian Journal of Mathematics, 10(2) 165-492 Junho de 2006.

[9] Bennet Chow, Dan. Knopf. *The Ricci Flow: An Introduction.* American Mathematical Society, 2004.

[10] R. Hamilton. ***Three-Manifolds with Positive Ricci Curvature.*** Journal of Differential Geometry 17 (1982), pp. 255–306.

[11] R. Hamilton. ***Four-Manifolds with Positive Curvature Operator.*** Journal of Differential Geometry 24 (1986), pp. 153–179

[12] Jeff. Weeks, *The shape of space.*