Tensores em variedades Riemannianas

$f = f_i e^i \Rightarrow f(e_j) = f_i e^i(e_j) = f_j$ $\qquad$ $v = \sum_i v^i e_i \Rightarrow e^j(v) = \sum_i v^i \delta_i^j = v^j$

$f = \sum_j f(e_j) e^j$ $\qquad$ $v = \sum_j e^j(v) e_j$

Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita, V^* o seu dual e $\mathrm{End}(V)$ o espaço vetorial dos endomorfismos de V. Uma aplicação multilinear:

$$T : \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{r \text{ vezes}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{s \text{ vezes}} \to \mathbb{R}$$

é dita um tensor real de tipo (r,s) em V. O espaço vetorial de todas tais aplicações será denotado por $\mathcal{T}_s^r(V)$.

Diremos que $T \in \mathcal{T}_s^r(V)$ é r-vezes contravariante e s-vezes covariante. Essa nomenclatura será justificada em breve.

Note que $\mathcal{T}_0^1(V) = V^{**}$, que pode ser naturalmente identificado com V via:

$$V \ni v \mapsto (V^* \ni f \mapsto f(v)) \in V^{**}$$

Definição: Sejam $\mathcal{B} = \{e_i\}_{1 \leq i \leq m}$ e $\mathcal{B}^* = \{e^i\}_{1 \leq i \leq m}$ bases duais de V e V^*, respectivamente (ou seja, $e^i(e_j) = \delta_j^i \; \forall i,j$). Dado $T \in \mathcal{T}_s^r(V)$, os componentes de T na base $\mathcal{B}$ são os números reais definidos por:

$$T^{i_1 \dots i_r}{}_{j_1 \dots j_s} := T(e^{i_1}, \dots, e^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s})$$

sejam quais forem $1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq m$.

Proposição: A aplicação:

$$\Psi : \operatorname{End}(V) \to \mathcal{T}^1_1(V)$$
$$T \mapsto \Psi(T) : V^* \times V \to \mathbb{R}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\cong T} \quad (f, v) \mapsto f(T(v))$$

é um isomorfismo

Dem: A linearidade e o fato de Ψ estar bem definida são triviais. Se $\Psi(T) = \Psi(\tilde{T})$, então $f(T(v)) = f(\tilde{T}(v))$ sejam quais forem $f \in V^*$ e $v \in V$. Em particular, tomando $v = e_i$ e $f = e^j$ com $i \neq j$, vemos que $e^j(T(e_i)) = e^j(\tilde{T}(e_i))$, donde vem $T = \tilde{T}$. Dado $g \in \mathcal{T}^1_1(V)$, definindo:

$$T(v) = \sum_{i=1}^{m} g(e^i, v) e_i$$

Vemos que:

$$[\Psi(T)](f, v) = f(T(v)) = f\left(\sum_{i=1}^{m} g(e^i, v) e_i\right) = \sum_{i=1}^{m} g(e^i, v) f(e_i)$$

$$= g(f, v) \implies \Psi(T) = g$$

de forma que T é sobrejetora.

$\square$

Definição: Sejam V e W espaços vetoriais reais de dimensão finita. Uma aplicação multilinear:

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r \text{ vezes}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s \text{ vezes}} \to W$$

é dita um W-tensor de tipo (r,s) em V. O espaço vetorial de todas tais aplicações será denotado por $\mathrm{Hom}^r_s(V,W)$.

Em particular,

$$\mathrm{Hom}^r_s(V,\mathbb{R}) = \mathcal{T}^r_s(V)$$

<u>Proposição</u>: $\mathrm{Hom}^r_s(V,V)$ é isomorfo a $\mathcal{T}^r_{s+1}(V)$.

<u>Dem</u>: É simples verificar que:

$$\Psi : \mathrm{Hom}^r_s(V,V) \to \mathcal{T}^{r+1}_s(V)$$

$$T \mapsto \Psi(T) : (V^*)^{r+1} \times V^s \to \mathbb{R}$$

$$(w^1,\dots,w^r,w^{r+1},v_1,\dots,v_s)$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{[\Psi(T)]}_{\cong T}(w^1,\dots,w^{r+1},v_1,\dots,v_s) = w^{r+1}(\overbrace{T(w^1,\dots,w^r,v_1,\dots,v_s)}^{\in V})$$

é um isomorfismo.

$\square$

Em geral não se faz distinção entre tensores reais e tensores vetoriais.

A existência de um produto interno $\langle , \rangle$ em V permite ainda mais identificações.

<u>Definição</u>: Definimos a aplicação bemol $\flat : V \to V^*$ por $\flat(v) = \langle v, \cdot \rangle$. $(\flat(v))(w) = \langle v, w \rangle$

<u>Proposição</u>: A aplicação bemol é um isomorfismo.

<u>Dem</u>: A linearidade é clara. Se $v \in \mathrm{Ker}\,\flat$, então:

$$\langle v, w\rangle = 0 \ \ \forall w \in V \Rightarrow v = 0$$

Logo $\flat$ é um isomorfismo.

<u>Definição</u>: Dado $f \in V^*$, existe um único $f^\# \in V$ tal que:

$$f(v) = \langle f^\#, v\rangle \ \ \forall v \in V$$

Fica então bem definida a aplicação sustenido:

$$\#: V^* \to V \qquad v = v^i e_i \qquad v^i \xrightarrow{\flat} v_i \qquad \text{"abaixa o tom"}$$

$$f \mapsto f^\# \qquad f = f_i e^i \qquad f_i \xrightarrow{\#} f^i \qquad \text{"aumenta o tom"}$$

que é o inverso de bemol.

Vejamos como esses isomorfismos agem em coordenadas.

Antes, iremos introduzir a seguinte:

<u>Notação de Einstein</u>: Para evitar escrever coisas do tipo:

$$\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r, s_1, \dots, s_s \leq n}$$

trabalhamos com a seguinte convenção:

- o índice final do somatório e o símbolo do somatório em si são descartados, com o entendimento que são óbvios pelo contexto (geralmente sempre a dimensão da variedade)
- convencionamos que sempre que o mesmo índice aparece numa mesma expressão monomial em cima e em baixo, estamos na verdade somando a expressão sob tal índice

• Se um índice aparece no denominador de uma expressão, ele está sempre em baixo.

Exemplos: • $v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i$ ou $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e^i$ viram $v = v^i e_i$, $f = f_i e^i$

• $\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{\gamma=1}^{n} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\gamma}$ vira $\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\gamma}$

Observação: Devemos sempre tomar cuidado ao detectar os índices "mudos" e os fixos. Fazendo substituições, por exemplo, temos que se $p^i = a^i_\gamma v^\gamma$ e $v^\gamma = b^\gamma_i w^i$, não é correto escrever:

$$p^i = a^i_\gamma b^\gamma_i w^i$$

O que acontece é que na verdade, em $v^\gamma = b^\gamma_i w^i$ o índice i é mudo, então poderíamos escrever $v^\gamma = b^\gamma_k w^k$ e substituir:

$$p^i = a^i_\gamma b^\gamma_k w^k \qquad (g_{i\gamma} = \langle e_i, e_\gamma \rangle)$$

Proposição: Seja $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ uma base de V. Se $v = v^i e_i \in V$ e $f = f_i e^i \in V^*$, então:

$$\flat(v) = v_\flat = (v_\flat)_i e^i \quad \text{e} \quad \#(f) = f^\# = (f^\#)^i e_i$$

$$v_i = g_{i\gamma} v^\gamma \quad \text{e} \quad f^i = g^{i\gamma} f_\gamma \qquad (v_\flat)_i = v_i, (f^\#)^i = f^i$$

Dem: Escrevendo $v_\flat = v_i e^i$, temos que:

$$v_\flat(e_\gamma) = v_i e^i(e_\gamma) = v_i \delta^i_\gamma = v_\gamma \quad \Rightarrow v_\flat = v_\flat(e_\gamma) e^\gamma \quad \Rightarrow f = f(e_\gamma) e^\gamma$$

Mas:

$$v_\flat(e_\gamma) = \langle v, e_\gamma \rangle = \langle v^i e_i, e_\gamma \rangle = v^i g_{i\gamma}$$

Logo: $v_s = v^i g_{is} \iff v_i = v^s g_{si} = v^s g_{is}$ $\quad v = e^s(v) e_s$

Escrevendo: $f^\# = (f^\#)^i e_i$, vemos que: $\Rightarrow f^\# = e^s(f^\#) e_s$

$$e^s(f^\#) = (f^\#)^i e^s(e_i) = (f^\#)^i \delta^s_i = (f^\#)^s$$

Mas $e^s(f^\#) = \langle f^\#, e_s \rangle = f(e_s)$. E temos:

$$f(e_s) = \langle f^\#, e_s \rangle = \langle (f^\#)^i e_i, e_s \rangle = f^i g_{is}$$

$\square$

<u>Corolário</u>: $(e_i)_b = g_{is} e^s$, $(e^i)^\# = g^{is} e_s$

<u>Dem</u>: Segue de $e_i = \delta_i^s e_s$ e da prop. anterior que:

$$(e_i)_b = g_{sk} \delta_i^k e^s = g_{si} e^s = g_{is} e^s$$

$e^1((x,y,z)) = x$

Analogamente, de $e^i = \delta^i_k e^k$, temos:

$$(e^i)^\# = g^{ks} \delta^i_s e_k = g^{ik} e_k$$

$(e_1)_b = e^1 \quad (e^1)^\# = e_1$

e_1, e_2, e_3

<u>Proposição</u>: A aplicação:

$$\#_1 : \mathcal{T}^2_0(V) \to \mathcal{T}^1_1(V)$$

$$T \mapsto T^{\#_1} : V^* \times V \to \mathbb{R}$$

$$(f, v) \mapsto T(f^\#, v)$$

é um isomorfismo.

Precisaremos do seguinte lema antes:

<u>Lema</u>: $\dim \mathcal{T}^1_1(V) = \dim \mathcal{T}^0_2(V) = n^2$

<u>Dem</u>: Definiremos primeiro a seguinte aplicação:

$$\otimes : V^* \times V \to \mathcal{T}^1_1(V)$$

$$(v, f) \mapsto v \otimes f : V^* \times V \to \mathbb{R}$$

$$(g, w) \mapsto g(v) f(w)$$

Que se estende naturalmente a:

$$\otimes : \mathcal{T}^r_s(V) \times \mathcal{T}^k_l(V) \to \mathcal{T}^{r+k}_{s+l}(V), \text{ por:}$$

$$(T\otimes S)(w^1,\dots,w^{r+k},v_1,\dots,v_{s+l}) = T(w^1,\dots,w^r,v_1,\dots,v_s) \cdot S(w^{r+1},\dots,w^{r+k},v_{s+1},\dots,v_{s+l})$$

Afirmo que:

$$\{e_i \otimes e^j \mid 1 \le i,j \le n\}$$

é uma base de $\mathcal{T}^1_1(V)$. De fato, se:

$$a^i_j e_i \otimes e^j = 0$$

Então avaliando em (e^k, e_l), temos:

$$(a^i_j e_i \otimes e^j)(e^k, e_l) = a^i_j (e_i \otimes e^j)(e^k, e_l) = a^i_j e^k(e_i) e^j(e_l)$$
$$= a^i_j \delta^k_i \delta^j_l = a^k_l = 0$$

Logo resta mostrar que tal conjunto gera $\mathcal{T}^1_1(V)$. De fato, dado $T \in \mathcal{T}^1_1(V)$, temos para quaisquer $f \in V^*$ e $v \in V$ que:

$$T(f,v) = T(f(e_i)e^i, e^j(v)e_j) = f(e_i)e^j(v)T^i_j$$
$$= T^i_j (e_i \otimes e^j)(f,v)$$
$$= (T^i_j e_i \otimes e^j)(f,v)$$

$$\Rightarrow T = T^i_j e_i \otimes e^j$$

Finalmente, é claro que:

$$\{e^i \otimes e^j \mid 1 \le i,j \le n\}$$

é uma base de $\mathcal{T}^0_2(V)$.

$\square$

Prova da proposição: Pelo lema basta mostrarmos a injetividade.

De fato, como:

$$(T^{\#_1})^i{}_g = T^{\#_1}(e^i, e_g) = T((e^i)^\#, e_g) = T(g^{ik}e_k, e_g)$$
$$= g^{ik}T_{kg}$$

Então $T^{\#_1} = 0 \Rightarrow g^{ik}T_{kg} = 0 \Rightarrow g^{i}g_{il}T_{kg} = \delta^k_l T_{kg} = T_{lg}$
$\Rightarrow T = 0.$

$\square$

Obs: Geralmente não se explicitam os isomorfismos. Ou seja, ao invés de $(T^{\#_1})^i{}_g = g^{ik}T_{kg}$ escrevemos simplesmente
$$T^i{}_g = g^{ik}T_{kg}$$
Mesmo que no lado esquerdo não estejamos trabalhando com o próprio T, mas com $T^{\#_1}$.

Obs: Analogamente,

$$\flat_1 : \mathcal{T}^2_0(V) \to \mathcal{T}^1_1(V)$$
$$T \mapsto T_{\flat_1} : V^* \times V \to \mathbb{R}$$
$$(f, v) \mapsto T(f, v_\flat)$$

é um isomorfismo.

Caso geral: $\mathcal{T}^a_b(V) \cong \mathcal{T}^r_s(V)$ desde que $r+s = a+b$.

Dem: Há vários isomorfismos possíveis. Um deles é:

$$\mathcal{T}^r_s(V) \xrightarrow{\psi_1} \mathcal{T}^0_{r+s}(V) \xrightarrow{Id} \mathcal{T}^0_{a+b}(V) \xrightarrow{\psi_3} \mathcal{T}^a_b(V)$$

onde $(\psi_1(T))(v_1, \dots, v_{r+s}) = T((v_1)_\flat, (v_2)_\flat, \dots, (v_r)_\flat, v_{r+1}, \dots, v_{r+s})$ e

$(\Psi_3(T))(\omega^1,\dots,\omega^a,v_1,\dots,v_b) = T((\omega^1)^\#,(\omega^2)^\#,\dots,(\omega^a)^\#,v_1,\dots,v_b).$

Exemplos concretos:

1: Todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ pode ser visto como uma 1-forma, dada por $X_\flat = \langle X, \cdot \rangle$.

2: O tensor de Ricci pode ser visto como um endomorfismo, dado por

$$\widetilde{Ric}: \Gamma(TM) \to \Gamma(TM) \qquad (Ric(X,\cdot))(Y) = Ric(X,Y)$$

$$X \mapsto \widetilde{Ric}(X) = \#(Ric(X,\cdot))$$

que é determinado por $\langle \widetilde{Ric}(X), Y \rangle = Ric(X,Y)$.

3: O tensor curvatura pode ser visto de maneiras diferentes:

$$R^{1,3}: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

$$(X,Y,Z) \mapsto R(X,Y)Z$$

$$R^{0,4}: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to C^\infty(M)$$

$$(X,Y,Z,W) \mapsto W_\flat(R^{1,3}(X,Y,Z))$$

$$R^{0,2}: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to End(\Gamma(TM))$$

$$(X,Y) \mapsto R^{0,2}(X,Y): \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

$$Z \mapsto R(X,Y)Z$$

Lema: Existe uma única aplicação linear $tr_1^1 : \mathcal{T}_1^1(V) \to \mathbb{R}$ tal que:

$$tr_1^1(v \otimes f) = f(v) \quad \forall f \in V^*, \forall v \in V$$

Dem: Em termos de uma base $\{e_i\}_{1 \le i \le n}$, devemos ter para qualquer $T \in \mathcal{T}_1^1(V)$ que:

$$tr_1^1(T) = tr_1^1(T^i_s\, e_i \otimes e^s) = T^i_s\, e^s(e_i) = T^i_s\, \delta^s_i$$
$$= T^i_i$$

Definindo então $tr(T) = T^i_i$, resta mostrar que tal definição não depende da base escolhida. De fato, se $\{\tilde{e}_i\}_{1\leq i\leq n}$ é outra base, então lembrando que todos $v \in V$ e $f \in V^*$ se escrevem como

$$v = e^i(v)\, e_i\,,\quad f = f(e_i)\, e^i \qquad \tilde{T}^i_i = \sum_i T(\tilde{e}^i, \tilde{e}_i)$$

Temos que:

$$T^i_i = T(e^i, e_i) = T\left(e^i(\tilde{e}_s)\tilde{e}^s,\ \tilde{e}^k(e_i)\tilde{e}_k\right) = e^i(\tilde{e}_s)\tilde{e}^k(e_i)\, T^{\tilde{s}}_{\tilde{k}}$$
$$= T^{\tilde{s}}_{\tilde{k}}\ \tilde{e}^k(e^i(\tilde{e}_s)e_i) = T^{\tilde{s}}_{\tilde{k}}\ \tilde{e}^k(\tilde{e}_s)$$
$$= T^{\tilde{s}}_{\tilde{k}}\ \delta^{\tilde{k}}_{\tilde{s}} = T^{\tilde{s}}_{\tilde{s}} = \sum_{s=1}^{n} T(\tilde{e}^s, \tilde{e}_s)$$

como desejado.

<u>Definição</u>: A contração na a-ésima entrada contravariante e b-ésima entrada covariante é a aplicação $tr^a_b : \mathcal{T}^r_s(V) \to \mathcal{T}^{r-1}_{s-1}(V)$ dada por:

$$[tr^a_b(T)](f^1, \dots, f^{r-1}, v_1, \dots, v_{s-1}) := tr_1^1\begin{pmatrix} T(f^1, \dots, f^{a-1}, \bullet, f^a, \dots, f^{r-1}, \\ v_1, \dots, v_{b-1}, \bullet, v_b, \dots, v_s) \end{pmatrix}$$

onde $T(f^1, \dots, f^{a-1}, \bullet, f^a, \dots, f^{r-1}, v_1, \dots, v_{b-1}, \bullet, v_b, \dots, v_s) : V^* \times V \to \mathbb{R}$

$$(g, w) \mapsto T(f^1, \dots, {}^{a-1}, g, f^a, v_1, \dots, v_{b-1}, w, v_b, \dots, v_s)$$

Definimos também:

$$tr_{1,2} : \mathcal{T}^0_2(V) \to \mathbb{R} \qquad , \qquad tr^{1,2} : \mathcal{T}^2_0(V) \to \mathbb{R}$$
$$T \mapsto tr_1^1(T^{\#_1}) \qquad\qquad T \mapsto tr_1^1(T_{\flat_1})$$

Nesses casos, temos:

$$T \in \mathcal{T}^0_2(V) \Rightarrow tr_{1,2}(T) = (T^{\#_1})^i{}_i$$
$$= T((e^i)^\#, e_i) = T(g^{si} e_s, e_i)$$
$$= g^{si} T_{si} = g^{is} T_{is}$$

$$T \in \mathcal{T}^2_0(V) \Rightarrow tr_{1,2}(T) = (T_{\flat_1})^i{}_i = T(e^i, (e_i)_\flat)$$
$$= T(e^i, g_{is} e^s) = g_{is} T^{is}$$

Definimos também:

$$tr_{a,b} : \mathcal{T}^r_s(V) \to \mathcal{T}^r_{s-2}(V) \qquad 1 \leq a, b \leq s-2$$
$$T \mapsto tr_{a,b}(T) : (V^*)^r \times V^{s-2} \to \mathbb{R}$$

$$[tr_{a,b}(T)](f^1, \dots, f^r, v_1, \dots, v_{s-2}) = tr_{1,2}\left(T(f^1, \dots, f^r, v_1, \dots, v_{a-1}, \cdot, v_a, \dots, v_{b-1}, \cdot, \dots, v_{s-2}) \right)$$

$$tr^{a,b} : \mathcal{T}^r_s(V) \to \mathcal{T}^{r-2}_s(V)$$
$$[tr^{a,b}(T)](f^1, \dots, f^{r-2}, v_1, \dots, v_s) = tr^{1,2}(T(f^1, \dots, \cdot, \dots, \cdot, f^{r-2}, v_1, \dots, v_s))$$

Em coordenadas, temos:

$$[tr_{a,b}(T)]^{i_1 \dots i_r}{}_{s_1 \dots s_{s-2}} = g^{kl} T^{i_1 \dots i_r}{}_{s_1 \dots k \dots l \dots s_{s-2}}$$
$$[tr_{a,b}(T)]^{i_1 \dots i_{r-2}}{}_{s_1 \dots s_s} = g_{kl} T^{i_1 \dots k \dots l \dots i_r}{}_{s_1 \dots s_s}$$

Exemplo: O tensor de Ricci pode ser definido por:

$$Ric(x,y) = tr(R(\cdot, x)y) = tr^1_1(R^1_1(\cdot, x)y)$$

onde $[R^1_1(\cdot,x)y](f,v) = f(R(v,x)y)$. Assim:

$$Ric_{kl} = [R^1_1(\cdot, e_k)e_l]^i{}_i = e^i(R_{ikl}) = e^i(e^s(R_{ikl})e_s)$$
$$= e^s(R_{ikl})\delta^i_s = R^s_{ikl}\delta^i_s = R_{skl}$$

Exemplo: Podemos definir:

$$scal = tr_{1,2}(Ric) = g^{is}(Ric)_{is} = g^{is}R_{is}$$

Lema: Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e ∇ sua conexão de Levi-Civita determinada por g. Então existe uma única conexão (que por abuso de notação também será denotada por ∇):

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \underbrace{\mathcal{J}^r_s(M)}_{:= \bigcup_{p \in M} \mathcal{J}^r_s(T_pM)} \to \mathcal{J}^r_s(M)$$

tal que:

i) Em $\mathfrak{X}(M)$, ∇ coincide com a conexão original

ii) Em $C^\infty(M)$, $\nabla_X f = X(f)$

iii) ∇ satisfaz a seguinte regra do produto:

$$\nabla_X(F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G)$$

iv) ∇ comuta com todos os traços: se tr denota o traço em relação a qualquer par de índices, então:

$$\nabla_X(\mathrm{tr}\, F) = \mathrm{tr}(\nabla_X F)$$

Essas quatro propriedades determinam completamente ∇, de forma que para quaisquer $T \in \mathcal{J}^r_s(M)$, $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ e $w^s \in \mathcal{J}^1_0(M)$, vale:

$$(\nabla_X T)(w^1, \dots, w^r, X_1, \dots, X_s) = X(T(w^1, \dots, w^r, X_1, \dots, X_s))$$
$$- \sum_{i=1}^{r} T(w^1, \dots, \nabla_X w^i, \dots, w^r, X_1, \dots, X_s)$$

$$- \sum_{i=1}^{s} T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_s)$$

onde para toda $\omega \in \mathcal{T}^1_0(M) = \Lambda^1(M)$, vale:

$$(\nabla_X \omega)(Y) + \omega(\nabla_X Y) = \nabla_X [\omega(Y)]$$

<u>Corolário</u>: Dado $T \in \mathcal{T}^l_k(M)$, temos:

$$(\nabla_m T)^{s_1 \cdots s_l}_{i_1 \cdots i_k} := \nabla_m T^{s_1 \cdots s_l}_{i_1 \cdots i_k}$$

$$= \partial_m (T^{s_1 \cdots s_l}_{i_1 \cdots i_k}) + \sum_{s=1}^{l} T^{s_1 \cdots s_{s-1} q s_{s+1} \cdots s_l}_{i_1 \cdots i_k} \Gamma^{s_s}_{mq}$$

$$- \sum_{t=1}^{k} T^{s_1 \cdots s_l}_{i_1 \cdots i_{r-1} q i_{r+1} \cdots i_k} \Gamma^{q}_{m i_r}$$

Em particular, em coordenadas normais centradas em p, temos:

$$(\nabla_m T)^{s_1 \cdots s_l}_{i_1 \cdots i_k} = [\partial_m (T^{s_1 \cdots s_l}_{i_1 \cdots i_k})](p)$$

<u>Dem</u>: Por definição,

$$(\nabla_m T)^{s_1 \cdots s_l}_{i_1 \cdots i_k} = (\nabla_{\partial_m} T)(dx^{s_1}, \dots, dx^{s_l}, \partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k})$$

$$= \partial_m (T^{s_1 \cdots s_l}_{i_1 \cdots i_k}) - \sum_{t=1}^{k} T(dx^{s_1}, \dots, dx^{s_l}, \partial_{i_1}, \dots, \nabla_{\partial_m} \partial_{i_t}, \dots, \partial_{i_k})$$

$$- \sum_{s=1}^{l} T(dx^{s_1}, \dots, \nabla_{\partial_m} dx^{s_s}, \dots, dx^{s_l}, \partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k})$$

Notando que:

$$(\nabla_{\partial_m} dx^{s_s})_a + dx^{s_s}(\nabla_{\partial_m} \partial_a) = \nabla_{\partial_m} [dx^{s_s}(\partial_a)] = \nabla_{\partial_m} (\delta^{s_s}_a) = 0$$

$$\Rightarrow (\nabla_{\partial_m} dx^{s_s})_a = -dx^{s_s}(\nabla_{\partial_m} \partial_a) = -dx^{s_s}(\Gamma^{\beta}_{ma} \partial_\beta)$$

$$= -\Gamma^{s_s}_{ma}$$

Temos então que:

$$\nabla_{\partial_m} dx^{s_s} = (\nabla_{\partial_m} dx^{s_s})_a \, dx^a = -\Gamma^{s_s}_{ma} dx^a$$

E portanto:

$$(\nabla_m T)^{s_1 \cdots s_\ell}_{i_1 \cdots i_k} = \partial_m (T^{s_1 \cdots s_\ell}_{i_1 \cdots i_k}) - \sum_{t=1}^{k} T(dx^{s_1}, \dots, dx^{s_\ell}, \partial_{i_1}, \dots, \Gamma^p_{mi_t} \partial_p, \dots, \partial_{i_k})$$

$$- \sum_{s=1}^{\ell} T(dx^{s_1}, \dots, -\Gamma^{s_s}_{ma} dx^a, \dots, dx^{s_\ell}, \partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k})$$

$$= \partial_m (T^{s_1 \cdots s_\ell}_{i_1 \cdots i_k}) - \sum_{t=1}^{k} T^{s_1 \cdots s_\ell}_{i_1 \cdots p \cdots i_k} \Gamma^p_{mi_t} + \sum_{s=1}^{\ell} T^{s_1 \cdots a \cdots s_\ell}_{i_1 \cdots i_k} \Gamma^{s_s}_{ma}$$

como desejado.

Definição: Definimos para $T \in \mathcal{T}^r_s(M)$ sua derivada covariante total $\nabla T : (\Gamma(T^*M))^r \times (\Gamma(TM))^{s+1} \to C^\infty(M)$

$$(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s, X) \mapsto (\nabla_X T)(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s)$$

Exemplo: Dada $f \in C^\infty(M)$, definimos $\mathrm{Hess}\, f = \nabla^2 f$, que é um $(0,2)$ tensor e age por:

$$\nabla^2 f : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to C^\infty(M)$$

$$(X, Y) \mapsto (\nabla^2 f)(X, Y) = [\nabla(\nabla f)](X, Y)$$

Temos: $[\nabla(\nabla f)](X, Y) = \nabla_Y [(\nabla f)](X)$

$$= \nabla_Y [\nabla_X f] - (\nabla f)(\nabla_Y X)$$

$$= \nabla_Y [\nabla_X f] - \nabla_{\nabla_Y X} f = Y(X(f)) - \nabla_{\nabla_Y X} f$$

Note que:

$$(\nabla^2 f)(X, Y) - (\nabla^2 f)(Y, X) = -[X, Y](f) - \nabla_{\underbrace{\nabla_Y X - \nabla_X Y}_{[X,Y]}} f$$

$$= -[X,Y](f) - \nabla_{-[X,Y]}f = -\left([X,Y](f) - \nabla_{[X,Y]}f\right)$$
$$= -\left([X,Y](f) - [X,Y](f)\right) = 0$$

E portanto Hess f é simétrico.

Exemplo: Definimos $\Delta f = tr_{1,2}(\nabla^2 f)$. Em coordenadas locais, temos então:

$$\Delta f = g^{is}(\nabla^2 f)_{is} = g^{is}\nabla_i\nabla_s f = \nabla^{(e_s)^\#}(\nabla_{e_s} f) = \nabla^s\nabla_s f$$

Em coordenadas normais, temos:

$$g^{is}\nabla_{e_i} = \nabla_{\underbrace{g^{is}e_i}_{=(e_s)^\#}}$$

$$\Delta f = g^{is}(\partial_i\partial_s)(f)$$

Mudanças de coordenadas:

Seja $T \in \mathcal{T}^r_s(V)$ e considere bases $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$, $\{\tilde{e}_i\}_{1\leq i\leq n}$ de V relacionadas por $\tilde{e}_s = a^i_s e_i$, $e_s = b^i_s \tilde{e}_i$. Então:

$$\tilde{e}^s = \tilde{e}^s(e_i)e^i = \tilde{e}^s(b^k_i\tilde{e}_k)e^i = b^i_s\delta^s_k e^i = b^i_k e^k$$

E portanto:

$$\tilde{T}^{i_1\cdots i_r}{}_{s_1\cdots s_s} = T(\tilde{e}^{i_1},\dots,\tilde{e}^{i_r},\tilde{e}_{s_1},\dots,\tilde{e}_{s_s})$$
$$= T(b^{i_1}_{k_1}e^{k_1},\dots,b^{i_r}_{k_r}e^r, a^{l_1}_{s_1}e_{l_1},\dots,a^{l_s}_{s_s}e_{l_s})$$
$$= b^{i_1}_{k_1}\cdots b^{i_r}_{k_r}a^{l_1}_{s_1}\cdots a^{l_s}_{s_s}T^{k_1\cdots k_r}{}_{l_1\cdots l_s}$$

Note também que (a^i_s) e (b^i_s) são inversas. De fato,

$$(AB)_{sk} = a^i_s b^k_i \qquad (AB)_{sk} = a^i_s b^k_i$$

E temos:

$$e_s = b^i_s\tilde{e}_i = b^i_s a^k_i e_k \Rightarrow (BA)_{sk} = \delta_{sk} \quad (*)$$
$$\tilde{e}_s = a^i_s e_i = a^i_s b^k_i \tilde{e}_k \Rightarrow (AB)_{sk} = \delta_{sk}$$

Assim, uma maneira de pensar em tal lei de transformação é que para cada índice covariante, um termo de A contribui ("co" corresponde à própria A), e para cada índice contravariante, um termo de A^{-1} contribui ("contra"-variante).

Exemplo: Sejam (x, U), (y, V) cartas em torno de um $p \in M$. Então todo $v \in T_pM$ se escreve como: $x^i = r^i \circ x$, $y^i = r^i \circ y$

$$v = v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \left(\text{pois } \frac{\partial x^s}{\partial x^i} = \delta_{is} \right)$$

Logo: $$\left.\frac{\partial}{\partial y^s}\right|_p = \left.\frac{\partial}{\partial y^s}\right|_p (x^i) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y^s} = \frac{\partial x^i}{\partial y^s} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

E temos para $T \in \mathcal{T}^r_s(M)$ que: $\left(A = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^s}\right), B = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^s}\right) \right)$

$$\tilde{T}^{i_1 \cdots i_r}_{s_1 \cdots s_s} = \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_r}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial y^{s_1}} \cdots \frac{\partial x^{l_s}}{\partial y^{s_s}} T^{k_1 \cdots k_r}_{s_1 \cdots s_s}$$

Logo, $\tilde{T}^{i_1 \cdots i_r}_{s_1 \cdots s_s} \in C^\infty(M) \Leftrightarrow T^{k_1 \cdots k_r}_{s_1 \cdots s_s} \in C^\infty(M)$.

Estendendo a métrica a tensores: Sejam $F, G \in \mathcal{T}^k_l(M)$. Definimos:

$$\langle F, G \rangle = g_{i_1 r_1} \cdots g_{i_k r_k} g^{s_1 s_1} \cdots g^{s_l s_l} F^{i_1 \cdots i_k}_{s_1 \cdots s_l} G^{r_1 \cdots r_k}_{s_1 \cdots s_l}$$

Em particular, se $k=0$, temos:

$$\langle F, G \rangle = F_{s_1 \cdots s_l} \underbrace{G^{s_1 \cdots s_l}}_{= G((e^{s_1})^\#, \ldots, (e^{s_l})^\#)}$$

$$(Ric)^i{}_s = R^i{}_s = Ric((e^i)^\#, e_s)$$

Def: Para um $T \in \mathcal{T}^1_k(M)$, definimos:

$$(\operatorname{div} T) \in \mathcal{T}^0_k(M), (\operatorname{div} T)(X_1, \dots, X_k)$$

$$\| $$

$$tr(X \mapsto (\nabla_X T)(X_1, \dots, X_k))$$

$$tr(t) = \sum_i \langle t(e_i), e_i \rangle$$

$$\|$$

$$\sum \langle (\nabla_{\partial_i} T)(X_1, \dots, X_k), \partial_i \rangle$$

Segunda (contraída) identidade de Bianchi: $\operatorname{div} Ric = \frac{1}{2} \nabla scal$

Prova: No final.

Coordenadas normais:

$$V = \exp_p(U)$$

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "B^{-1}"] & \mathbb{R}^n \\ U \arrow[u, "(\exp_p|_V)^{-1}"] \arrow[ur, "\varphi = B^{-1} \circ (\exp_p|_V)^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij}, \quad \Gamma_{ij}^k(p) = 0 \quad \forall 1 \leq i, j, k \leq n$$

$$g_{ij}(t) = \delta_{ij} + \frac{1}{3} R_{ikej}(p) x^k x^e + \mathcal{O}(|t^3|)$$

$(0,4)$ tensores antissimétricos $\Longleftrightarrow$ Operadores em $\Lambda^2(M)$

Sejam ω e $\tilde{\omega}$ 2-formas em uma variedade Riemanniana M e $P \in \mathcal{T}^0_4(M)$ um $(0,4)$ tensor tal que:

$$P_{ijke} = -P_{jike} = -P_{ijek}$$

Podemos escrever $e^i = dx^i$ e determinar as expressões locais de ω e $\tilde{\omega}$. Temos:

$$w=\sum_{i<j} w_{ij}\, dx^i \wedge dx^j = \sum_{i<j} \frac{(w_{ij}-w_{ji})}{2}\, dx^i \wedge dx^j$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i<j} w_{ij}\, dx^i \wedge dx^j - \frac{1}{2}\sum_{j>i} w_{ij}\, dx^j \wedge dx^i$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i<j} w_{ij}\, dx^i \wedge dx^j + \frac{1}{2}\sum_{j>i} w_{ij}\, dx^j \wedge dx^i$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j\leq m} w_{ij}\, dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} w_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$$

Podemos definir então um operador $\tilde{P}: \Lambda^2(M)\times\Lambda^2(M)\to C^\infty(M)$ ao colocar $\tilde{P}(dx^i\wedge dx^j, dx^k \wedge dx^l) = P_{ijlk}$ e estender por linearidade.

A relação:

$$\langle \tilde{\tilde{P}}(X\wedge Y), V\wedge W\rangle = \tilde{P}(X\wedge Y, V\wedge W)$$

determina então um operador $\tilde{\tilde{P}}: \Lambda^2(M)\to\Lambda^2(M)$. De fato $\tilde{\tilde{P}}$ está bem definido, pois

$$\langle \tilde{\tilde{P}}(Y\wedge X), V\wedge W\rangle = \tilde{P}(Y\wedge X, V\wedge W) = -\tilde{P}(X\wedge Y, V\wedge W)$$

$$= -\langle \tilde{\tilde{P}}(X\wedge Y), V\wedge W\rangle$$

Note que:

$$e^p\wedge e^q = \frac{1}{2}(e^p\wedge e^q)_{ij}\, e^i\wedge e^j = \frac{1}{2}\underbrace{S^{pq}_{ij}}_{=\begin{cases}1 & \text{se } (p,q)=(i,j)\\ -1, & \text{se } (p,q)=(j,i)\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}} e^i\wedge e^j$$

Por definição, temos também:

$$(\tilde{P}w) = (\tilde{P}w)_{ij}\, e^i \wedge e^j \cdot 1/2$$

$$\Rightarrow \langle \tilde{P}w, e^p \wedge e^q \rangle = (\tilde{P}w)_{ij}\, \delta^{ij}_{pq}$$

$$\langle P(\tfrac{1}{2} w_{kl}\, e^k \wedge e^l), e^p \wedge e^q \rangle = \sum_{k,l} \frac{1}{2} w_{kl} P_{klqp}$$

Fazendo $(p,q) = (i,j)$, vemos que:

$$\sum_{k,l} \frac{1}{2} w_{kl} P_{klji} = \sum_{k,l} \frac{1}{2} w_{kl} P_{ijlk} = (Pw)_{ij}$$

E portanto:

$$\boxed{Pw = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (Pw)_{ij}\, e^i \wedge e^j = \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} P_{ijlk} w_{kl}\, e^i \wedge e^j} \quad (*)$$

$(*)$ determina completamente $P : \Lambda^2(M) \to \Lambda^2(M)$. Começamos com um $(0,4)$ tensor e obtemos um operador em $\Lambda^2(M)$. Reciprocamente, poderíamos ter começado com um operador $P : \Lambda^2(M) \to \Lambda^2(M)$ e obtido um $(0,4)$-tensor pela relação:

$$P_{pqrs} = \langle P(e^p \wedge e^q), e^s \wedge e^r \rangle$$

$\nabla X = 0$

Prova: Fixe $v \in T_pM$, e seja γ a única geodésica tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. $\exists!\, V \in \mathfrak{X}^\gamma(M)$ tal que V é paralelo ao longo de γ, i.e., $(\nabla_X V)\circ\gamma \equiv 0$ $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$. Em particular, temos que $\nabla_v X = 0$ $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$. Tome também um referencial ortonormal $\{E_i\}_{1\leq i\leq n}$ em $p \in M$ tal que $(\nabla_{E_i} X)(p) = 0$ $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$. Então:

$$(d\,\mathrm{Scal}(V))(p) = (V(S))(p) = V\Big(\sum_i \langle \mathrm{Ric}(E_i), E_i\rangle\Big) \qquad S = \mathrm{Scal}$$

$\nabla V = 0$ ao longo de γ

$$= V\Big(\sum_{i,j} \langle R(E_i,E_j)E_j, E_i\rangle\Big) = \sum_{i,j} \langle \nabla_V [R(E_i,E_j)E_j], E_i\rangle$$

Bianchi

$$= \sum_{i,j} \langle (\nabla_V R)(E_i,E_j)E_j, E_i\rangle = -\sum \langle (\nabla_{E_j} R)(V,E_i)E_j, E_i\rangle$$

$$- \sum \langle (\nabla_{E_i} R)(E_j, V)E_j, E_i\rangle$$

$$= -\sum (\nabla_{E_j} R)(V,E_i,E_j,E_i) - \sum (\nabla_{E_i} R)(E_j, V, E_j, E_i)$$

$$= \sum (\nabla_{E_j} R)(E_j,E_i,E_i,V) + \underbrace{\sum (\nabla_{E_i} R)(E_i,E_j,E_j,V)}_{= \sum (\nabla_{E_j} R)(E_j,E_i,E_i,V)}$$

$$= 2\sum (\nabla_{E_j} R)(E_j,E_i,E_i,V)$$

$$= 2\sum \nabla_{E_j}(R(E_j,E_i,E_i,V)) = 2\sum \nabla_{E_j}(\underbrace{\langle \mathrm{Ric}(E_j), V\rangle}_{= \mathrm{Ric}(E_j,V) = \mathrm{Ric}(V,E_j) = \langle \mathrm{Ric}(V), E_j\rangle})$$

$\sum R(E_j,E_i)E_i = \mathrm{Ric}(E_j)$

$$= 2 \sum \nabla_{E_8}(\langle Ric(V), E_8 \rangle) = 2 \sum \langle (\nabla_{E_8} Ric)(V), E_8 \rangle$$

$$= 2 \, (div \, Ric)(V)(p)$$

$$d\,Scal = 1/2 \; div \, Ric$$

$$(d\,Scal)(v) = 1/2 (div \, Ric)(v_p)$$