XI Encontro Nacional dos grupos PET de Matemática
15, 16 e 17 de novembro de 2019

Uma introdução ao fluxo de Ricci e variedades de Einstein

Matheus Andrade Ribeiro de Moura Horácio, João Paulo dos Santos
Departamento de Matemática - Universidade de Brasília
matheus.andrade5488@gmail.com, joaopsantos@unb.br

Resumo

Mostramos que as variedades de Einstein são soluções autossimilares do fluxo de Ricci e apresentamos uma generalização natural: os sólitons de Ricci. Além disso, demonstramos um resultado de 1988 devido a W. Kuhnel sobre variedades de Einstein localmente conformes a uma variedade de curvatura constante.

Introdução

DEsde sempre, uma das áreas de pesquisa bastante ativa em geometria tem sido entender a relação entre topologia e curvatura[1]. Um dos problemas mais importantes do século passado tem sido exatamente a classificação topológica das 3-variedades. Mais especificamente nessa direção, Poincaré indagou (ver [3]) no final de um artigo de 1904 (reformulada em linguagem atual): *se $\mathcal{M}$ é uma 3-variedade fechada com grupo fundamental trivial, então $\mathcal{M}$ é difeomorfa*[2] *a $\mathbb{S}^3$?*

A *Conjectura de Poincaré* afirma que sim e a sua prova envolve exatamente o estudo da curvatura. Na década de 1980, Thurston desenvolveu uma abordagem (ver [5] e as referências lá contidas) ao considerar 3-variedades que admitem métricas Riemannianas de curvatura negativa constante -1. Embora hajam obstruções naturais à existência de tais métricas em 3-variedades arbitrárias, Thurston formulou uma conjectura mais geral que, a grosso modo, afirma que toda 3-variedade fechada pode ser decomposta de uma maneira canônica em pedaços tais que cada um possui um de oito tipos de estruturas geométricas. Em dimensão ≤ 3, o tensor de Ricci determina (e é determinado) pelo tensor curvatura, de forma que qualquer métrica Riemanniana de curvatura de Ricci constante também tem curvatura seccional constante, e pode-se mostrar que o recobrimento universal de uma variedade fechada de curvatura positiva constante é difeomorfo à esfera (portanto toda variedade simplesmente conexa de curvatura positiva constante é isométrica à esfera).

Assim, um bom palpite de uma possível abordagem à conjectura de Poincaré e ao problema mais geral da geometrização de Thurston é responder à seguinte pergunta: *sob hipóteses apropriadas sobre o grupo fundamental de uma 3-variedade $\mathcal{M}$, como pode-se garantir a existência de uma métrica de curvatura de Ricci constante em $\mathcal{M}$?* A peça chave para produzir uma tal métrica é a equação do fluxo de Ricci, introduzida por Richard Hamilton, que evolui uma

[1]Podendo ser a mesma a curvatura seccional, de Ricci ou escalar. Exemplos clássicos do que se quer dizer aqui incluem os teoremas de Killing-Hopf, Bonnet-Myers e o problema da curvatura escalar prescrita.

[2]Pode-se mostrar (veja [5]) que, a menos de difeomorfismos, toda 3-variedade possui uma única estrutura diferenciável. Assim, se uma 3-variedade é homotopicamente equivalente a $\mathbb{S}^3$, ela é também difeomorfa a $\mathbb{S}^3$.

métrica arbitrária inicial g_0 em $\mathcal{M}$ da seguinte maneira:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\,\mathrm{Ric}_{g(t)}$$
$$g(0) = g_0,$$

onde $\mathrm{Ric}_{g(t)}$ denota a curvatura de Ricci da métrica $g(t)$. A ideia aqui é tentar evoluir a métrica de forma que a mesma evolua a alguma das oito estruturas geométricas fundamentais de Thurston. O programa de Hamilton, completado por Grigori Perelman, consiste em usar o fluxo de Ricci para atacar essa conjectura. Por meio de seus trabalhos, era esperado que o fluxo de Ricci pudesse ser usado para *inferir* a existência de uma decomposição geométrica ao tomar qualquer métrica Riemanniana inicial em uma 3-variedade fechada e provando suficientes resultados analíticos, geométricos e topológicos sobre as soluções correspondentes do fluxo de Ricci com cirurgia. De fato esse objetivo foi completado, e entender como requer precisamente uma ótima compreensão de, entre outros vários assuntos, o fluxo de Ricci.

As variedades de Einstein

Definição 1. *Uma variedade Riemanniana* $(\mathcal{M}^n, g)$ *é dita uma variedade de Einstein se, para qualquer par de campos de vetores* X, Y *em* $\mathcal{M}$*, vale* $\mathrm{Ric}(X,Y) = \lambda g(X,Y)$*, onde* $\lambda : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ *é uma função real.*

Observação. Se $\mathcal{M}^n$ é conexa e de Einstein com $n \geq 3$, então λ é constante em $\mathcal{M}$, e se $\lambda = 3$ então $\mathcal{M}^3$ tem curvatura seccional constante. De fato, a segunda identidade de Bianchi se escreve $\mathrm{d}\,\mathrm{Sc} = 2\,\mathrm{div}(\mathrm{Ric})$ (onde Sc é a curvatura escalar de $\mathcal{M}$), no nosso caso $\mathrm{d}(\lambda \mathrm{tr}(g)) = n\mathrm{d}\lambda = 2\,\mathrm{div}(\lambda g)$, que fica:

$$2g^{ij}\nabla_i(\lambda g_{jk})\ \mathrm{d}x^k = 2g^{ij}g_{jk}\nabla_i\lambda\ \mathrm{d}x^k = 2\ \mathrm{d}\lambda,$$

onde usamos a notação de Einstein. Portanto $n \geq 3 \implies \mathrm{d}\lambda \equiv 0$, e pela conexidade de $\mathcal{M}$, λ é então constante. Para a segunda parte, basta tomar $p \in \mathcal{M}$ arbitrário, um referencial geodésico $\{e_1, e_2, e_3\}$ em p, e então $\sum_{i=1}^{3} R(X, e_i, Y, e_i) = 2\lambda g(X,Y)$. Fazendo $X = Y = e_j$ com $j \in \{1,2,3\}$ e avaliando em p obtemos um sistema para λ que nos dá $\lambda = R_{1212}(p) = R_{1313}(p) = R_{2323}(p)$, e o resultado segue então do teorema de Schur. Tomando o traço de $\mathrm{Ric} = \lambda g$ e usando a identidade de Bianchi é possível também mostrar que Sc é constante.

Exemplo. É simples mostrar que qualquer variedade Riemanniana de curvatura constante é de Einstein.

Mostraremos agora que toda variedade de Einstein é solução do fluxo de Ricci. De fato, se $(\mathcal{M}, g)$ é Einstein, então $\mathrm{Ric}_{ij}(p,0) = \lambda g_{ij}(p,0)$ para todo $p \in \mathcal{M}$ com λ constante. Colocando $g_{ij}(x,t) = \rho^2(t) g_{ij}(x,0)$ vemos que $\mathrm{Ric}_{ij}(p,t) = \mathrm{Ric}_{ij}(p,0) = \lambda g_{ij}(p,0)$ (é simples mostrar que o tensor de Ricci é preservado por mudanças de escalas que não dependem do ponto $p \in \mathcal{M}$). A equação do fluxo de Ricci se escreve então como:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho^2(t) g_{ij}(p,0)\right) = -2\lambda g_{ij}(x,0),$$

que nos dá a EDO

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\lambda}{\rho},$$

cuja solução é dada por

$$\rho^2(t) = 1 - 2\lambda t,$$

Assim, se $\lambda > 0$, a métrica $g_{ij}(x,t)$ vai evoluindo homoteticamente até encolher a um ponto conforme $t \to T = \dfrac{1}{2\lambda}$, e se $\lambda < 0$ a métrica expande hometicamente em todo instante. Esses dois casos correspondem, respectivamente, a curvatura escalar que "explode" (vai a ∞) e que vai a 0.

Os sólitons de Ricci

Como dito anteriormente, o objetivo de Hamilton era evoluir uma métrica de uma variedade Riemanniana arbitrária dada em uma métrica de curvatura "uniforme", mais tratável. Há uma classe de soluções que constituem uma obstrução para isso: os *sólitons*. Geometricamente (ou seja, a menos de isometrias, que são difeomorfismos que preservam distância), eles evoluem sobre o fluxo de Ricci apenas por mudança de escala. Quocientando o conjunto das métricas Riemannianas em uma dada variedade diferenciável pela relação de equivalência $g_1 \sim g_2 \iff g_1$ e g_2 diferem apenas por homotetias e difeomorfismos, vemos então que os sólitons são pontos fixos da equação do fluxo de Ricci.

Lema 1. ([4]) Em uma variedade Riemanniana $(\mathcal{M}^n, g)$, para um referencial ortonormal $\{X_1, \cdots, X_n\}$, vale:

$$(\mathcal{L}_X g)_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i,$$

onde ∇ denota a conexão de Levi-Civita de g, $\mathcal{L}$ denota a derivada de Lie, e $\nabla_i X_j$ denota a j-ésima componente de $\nabla_{X_i} X$ na base $\{X_1, \cdots, X_n\}$.

Demonstração: Seja ω a 1-forma dual ao campo X, i.e, $\omega(Y) = \langle X, Y\rangle$. Usando a regra do produto, a compatibilidade da métrica e a torsão nula da conexão de Levi-Civita, temos:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X g)(Y,Z) &= X(g(Y,Z)) - g(\mathcal{L}_X Y, Z) - g(Y, \mathcal{L}_X Z) \\
&= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle - \langle [X,Y], Z\rangle - \langle Y, [X,Z]\rangle \\
&= \langle \nabla_X Y - [X,Y], Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z - [X,Z]\rangle \\
&= \langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle \\
&= Y\langle X, Z\rangle - \langle X, \nabla_Y Z\rangle + Z\langle Y, X\rangle - \langle \nabla_Z Y, X\rangle \\
&= Y(\omega(Z)) - \omega(\nabla_Y Z) + Z(\omega(Y)) - \omega(\nabla_Z Y) \\
&= (\nabla_Y \omega)(Z) + (\nabla_Z \omega)(Y),
\end{aligned}$$

que é uma versão livre de coordenadas da fórmula desejada. De fato, se $Y = X_i$ e $Z = X_j$, temos

$$\begin{aligned}
(\nabla_{X_i}\omega)(X_j) + \left(\nabla_{X_j}\omega\right)(X_i) &= X_i(\omega(X_j)) - \omega(\nabla_{X_i} X_j) + X_j(\omega(X_i)) - \omega\left(\nabla_{X_j} X_i\right) \\
&= X_i\langle X, X_j\rangle - \langle X, \nabla_{X_i} X_j\rangle + X_j\langle X_i, X\rangle - \left\langle \nabla_{X_j} X_i, X\right\rangle \\
&= \langle \nabla_{X_i} X, X_j\rangle + \left\langle X_i, \nabla_{X_j} X\right\rangle,
\end{aligned}$$

que é exatamente o que queríamos, pois na base $\{X_1, \cdots, X_n\}$ a métrica é dada por $g_{ij} = \delta_{ij}$.

$\blacksquare$

Definição 2. *Seja $(\mathcal{M}^n, g(t))$ uma solução do fluxo de Ricci, e suponha que $\varphi_t : \mathcal{M}^n \to \mathcal{M}^n$ é uma família de difeomorfismos dependente de t (com $\varphi_0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$) e que $\sigma(t)$ é um fator de escala dependente de t (com $\sigma(0) = 1$). Quando:*

$$g(t) = \sigma(t)\varphi_t^*(g(0)),$$

diremos que a solução $(\mathcal{M}^n, g(t))$ é um sóliton de Ricci.

Observação. Tomando a derivada dessa expressão e avaliando em $t = 0$ nos dá:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g(t) &= \frac{d\sigma(t)}{dt}\varphi_t^*(g(0)) + \sigma(t)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t^* g(0) \\ -2\operatorname{Ric}_{g(0)} &= \sigma'(0)g(0) + \mathcal{L}_V g(0), \end{aligned}$$

onde $V = \dfrac{d\varphi_t}{dt}$ pela definição da derivada de Lie. Assim, outra equação que caracteriza os sólitons de Ricci é:

$$\operatorname{Ric} + \mathcal{L}_V g = \lambda g,$$

Colocando $\lambda = \dfrac{\sigma'(0)}{2}$, podemos usar o resultado do lema anterior para escrever isso em coordenadas como:

$$-2\operatorname{Ric}_{ij} = 2\lambda g_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i,$$

Se acontecer de V ser o gradiente de alguma função suave f definida em $\mathcal{M}$, diremos que $(\mathcal{M}, g, V, \lambda)$ é um *sóliton de Ricci gradiente com função potencial* f, cuja equação fica:

$$\operatorname{Ric}_{ij} + \lambda g_{ij} + \nabla_i \nabla_j f = 0,$$

Conforme a equação acima, um sóliton de Ricci gradiente é dito *shrinking* se $\lambda < 0$, *steady* se $\lambda = 0$, e *expanding* se $\lambda > 0$.

Exemplo. O charuto de Hamilton é a superfície Riemanniana completa $\left(\mathbb{R}^2, g_\Sigma\right)$, onde

$$g_\Sigma = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{1 + x^2 + y^2},$$

e $\mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x$. Como uma solução do fluxo de Ricci, sua versão dependente do tempo é:

$$g_\Sigma(t) = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{e^{4t} + x^2 + y^2},$$

Com a mudança de variáveis $\tilde{x} = e^{-2t}x$ e $\tilde{y} = e^{-2t}y$, é fácil mostrar que $g_\Sigma(t) = \dfrac{\mathrm{d}\tilde{x}^2 + \mathrm{d}\tilde{y}^2}{e^{4t} + x^2 + y^2}$ é isométrica a $g_\Sigma = g_\Sigma(0)$, ou seja, se definirmos o grupo a 1-parâmetro de difeomorfismos (conformes) $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ colocando $\varphi_t(x, y) = \left(e^{-2t}x, e^{-2t}y\right)$, então:

$$g_\Sigma(t) = \varphi_t^*(g_\Sigma(0)),$$

de forma que $g_\Sigma(t)$ é um sóliton de Ricci steady. Também é gradiente, com função potencial $f(x, y) = -\log\left(1 + x^2 + y^2\right)$.

Exemplo. Pode-se verificar que o produto $(0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$, com ϕ e com a métrica dada por $g = \mathrm{d}r^2 + (\phi(r))^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ e a função potencial f satisfazendo o sistema:

$$f'' = (n-1)\frac{\phi''}{\phi}, \qquad \phi\phi' f' = -(n-2)\left(1 - (\phi')^2\right) + \phi\phi'',$$

define um sóliton de Ricci gradiente completo, steady e rotacionalmente simétrico com operator curvatura positiva em $\mathbb{R}^n$. A menos de homotetia, ele é o único que satisfaz tais condições em $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 3$.

Os exemplos acima mostram que existem sólitons de Ricci que não são Einstein, e portanto os sólitons de Ricci realmente são generalizações naturais das variedades de Einstein.

Definição 3. *Duas métricas Riemannianas $g, \widetilde{g}$ em uma variedade $\mathcal{M}$ são ditas conformes se existe uma função positiva e diferenciável $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $p \in \mathcal{M}$ e todo $u, v \in T_p\mathcal{M}$ vale $g_p(u, v) = f(p)\widetilde{g}_p(u, v)$. Uma variedade Riemanniana $(\mathcal{M}, g)$ é dita localmente conformemente plana se para cada ponto $p \in M$ existe uma vizinhança U_p e uma função diferenciável f definida em M tal que (U_p, fg) é plana (isso é, a curvatura de (U_p, fg) se anula em U_p).*

Os dois exemplos acima são sólitons de Ricci gradiente localmente conformemente planos. O estudo de sólitons de Ricci gradiente localmente conformemente planos atraiu bastante interesse nos últimos anos, e uma classificação completa só foi atingida recentemente, devido aos trabalhos de Ni, Wallach, Xiaodong Cao, Biao Wan, Zhow Zhang, R. Bryant, López e García Rio.

É natural perguntar o que acontece quando temos variedades de Einstein localmente conformemente planas, ou, mais em geral, localmente conformes a uma variedade Riemanniana de curvatura constante. Mostraremos agora o último resultado desse trabalho, devido a W. Kuhnel, de 1988: *variedades de Einstein localmente conformes a alguma variedade de curvatura seccional constante têm curvatura seccional constante.*

Teorema 2. *Seja $(\mathcal{M}^n, \widetilde{g})$ uma variedade de Einstein e suponha que $\mathcal{M}$ é conforme a uma variedade de curvatura seccional constante, i.e, existe $\psi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ tal que $(\mathcal{M}, \psi^2\widetilde{g})$ tem curvatura seccional constante K. Então $(\mathcal{M}^n, \widetilde{g})$ tem curvatura seccional constante.*

Precisaremos de alguns lemas antes.

Lema 3. Se $g, \widetilde{g}$ são duas métricas Riemannianas conformes em $\mathcal{M}$, i.e $\widetilde{g} = e^{-2\varphi}g = \psi^{-2}g$ com $\varphi, \psi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, então valem as seguintes relações para g e $\widetilde{g}$:

1. $\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - (X\varphi)Y - (Y\varphi)X + \langle X, Y\rangle \operatorname{grad}\varphi$

2. $$\begin{gathered}\widetilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \langle \nabla_X \operatorname{grad}\varphi, Z\rangle Y + \langle \nabla_Y \operatorname{grad}\varphi, Z\rangle X\\ -\langle X, Z\rangle \nabla_Y \operatorname{grad}\varphi + \langle Y, Z\rangle \nabla_X \operatorname{grad}\varphi + (Y\varphi)(Z\varphi)X\\ -(X\varphi)(Z\varphi)Y - \langle \operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\varphi\rangle \cdot (\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y)\\ +\{(X\varphi)\langle Y, Z\rangle - (Y\varphi)\langle X, Z\rangle\} \cdot \operatorname{grad}\varphi\end{gathered}$$

3. $$\widetilde{\mathrm{Ric}} = \mathrm{Ric} + \left(\Delta\varphi - (n-2)\|\operatorname{grad}\varphi\|^2\right) g + (n-2)e^{-\varphi}\nabla^2\left(e^{\varphi}\right)$$

Demonstração: A primeira equação segue ao aplicar a fórmula de Koszul para a conexão de Levi-Civita induzida por g e $\widetilde{g}$. A segunda equação segue ao aplicar a primeira aos termos da forma $\nabla_X\nabla_Y Z$ e $\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y Z$ e agrupar os termos com as segundas derivadas de φ e seu hessiano. A última equação segue da segunda ao tomar o traço com respeito a uma base ortonormal.

■

Lema 4. Seja $(\mathcal{M}, g)$ uma variedade de Einstein e $\widetilde{g} = \psi^{-2}g$. São equivalentes:

1. $(\mathcal{M}, \widetilde{g})$ é uma variedade de Einstein

2. Existe uma função $\lambda : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ com $\nabla_g^2\psi = \lambda g$

3. $\nabla_g^2\psi = \dfrac{\Delta\psi}{n} g$

Demonstração: Segue ao aplicar a última parte do lema anterior e ao usar $\operatorname{tr} \circ \nabla^2 = \Delta$.

$\blacksquare$

Para mostrarmos o teorema 2, resta então provar que a parte 3 do lema 4 implica que $(\mathcal{M}, \widetilde{g})$ tem curvatura seccional constante. De fato, sendo $\widetilde{K}$ a curvatura seccional de $(\mathcal{M}^n, \widetilde{g})$ e σ um 2-subespaço de $T_p\mathcal{M}$ e tomando X, Y g-ortonormais base de σ, e colocando $\widetilde{X} = \psi X$ e $\widetilde{Y} = \psi Y$, temos que $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$ são $\widetilde{g}$-ortonormais e base de σ. Usando os lemas já demonstrados, temos:

$$
\begin{aligned}
\psi^{-2}\widetilde{K} &= K + \nabla^2\varphi(Y,Y) + \nabla^2\varphi(X,X) + (Y\varphi)^2 + (X\varphi)^2 - \|\operatorname{grad}\varphi\|^2 \\
&= K + \frac{1}{\psi}\nabla^2\psi(X,X) + \frac{1}{\psi}\nabla^2\psi(Y,Y) - \|\operatorname{grad}\varphi\|^2 \\
&= K + \frac{1}{\psi}\frac{\Delta\psi}{n} + \frac{1}{\psi}\frac{\Delta\psi}{n} - \|\operatorname{grad}\varphi\|^2 \\
&= K + \frac{2}{n}\frac{\Delta\psi}{\psi} - \|\operatorname{grad}\varphi\|^2,
\end{aligned}
$$

e o resultado desejado segue do Teorema de Schur.

Conclusão

Vimos que o fluxo de Ricci desempenha um papel essencial à resolução da conjectura de geometrização de Thurston, e, em particular à conjectura de Poincaré (ver [6]), sendo uma bela ponte entre análise, geometria e topologia. Apesar de o fluxo de Ricci ter ganhado mais atenção justamente devido a ter esse poder imenso, ele próprio é interessante por si só e ainda estudado atualmente. Os sólitons de Ricci e as variedades de Einstein são soluções particulares do fluxo, e uma vez que as variedades de Einstein são precisamente as variedades Riemannianas de curvatura de Ricci constante, é natural perguntar se as mesmas criam uma boa generalização ao conceito de curvatura constante em dimensão ≥ 3. Sabe-se que pedir curvatura seccional constante é demais (teorema de Killing-Hopf), pois geometricamente só existem 3 (simplesmente conexas), e uma só quando fixado o sinal. Por outro lado pedir curvatura escalar constante é muito fraco, pois pela resolução positiva do problema de Yamabe, dada qualquer variedade Riemanniana compacta de dimensão ≥ 3 com uma métrica g, sempre existe g' conforme a g tal que g' tem curvatura escalar constante. Pode-se perguntar então que condições devem ser impostas em uma variedade Riemanniana $(\mathcal{M}^n, g)$ para que $\mathcal{M}$ admita uma métrica de curvatura de Ricci constante. A príncipio poderíamos tentar construir métricas localmente conformemente planas, mas o teorema 2 garante que variedades de Einstein com tais métricas têm curvatura seccional constante e portanto essa estratégia é falha. Esse é um problema em aberto, algo que mostra que a curvatura de Ricci ainda não é completamente entendida.

Referências

[1] CHOW, B.; LU, P.; NI, L.. *Hamilton's Ricci flow,* American Mathematical Society and Science Press, 2006.

[2] KÜHNEL, W. *Conformal transformations between Einstein spaces.* In: CONFORMAL GEOMETRY (BONN, 1985/1986), Aspects Math., E12, p. 105–146. Vieweg, Braunschweig, 1988.

[3] Poincaré, H. *Cinquième complément à l'analysis situs.* Rend. Circ. Mat. Palermo 18 (1904), 45-110. (Ver Oeuvres, Tome VI, Paris, 1953, p. 498.) MR1401792 (98m:01041)

[4] Sheridan, N. *Hamilton's Ricci Flow,* Notas de aula.

[5] Morgan, John. W. *Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds.* Bull. Amer. Math. Soc. **42** (2005) 57-78.

[6] Morgan, John. W., Tian, G. *Ricci flow and the Poincaré conjecture,* Clay Mathematics Monographs 3, Amer. Math. Soc. (2007) MR2334563