Sumário

AULA 10

Metrizabilidade e Axiomas de Separação

DEFINIÇÃO 10.1. Seja (Ω, τ) um espaço topológico não vazio. Temos as seguintes definições:

a) Seja $x \in \Omega$, diremos que $U \subset \Omega$ é uma *vizinhança* de x quando $x \in U^{\circ}$;
b) Dado $x \in \Omega$ *base de vizinhanças* $\mathscr{B}_x$ de x a família de vizinhanças de x com a seguinte propriedade: se U é qualquer vizinhança de x, então existe $V \subset \mathscr{B}_x$ tal que $V \subset U$;
c) Uma *cobertura aberta* de Ω é um subconjunto $\mathscr{F} \subset \tau$ tal que $\bigcup_{U \in \mathscr{F}} U = \Omega$; Uma *subcobertura* é um subconjunto de $\mathscr{F}$ que ainda é uma cobertura.

DEFINIÇÃO 10.2. Seja (Ω, τ) um espaço topológico não vazio. Temos as seguintes definições:

a) Diremos que Ω satisfaz o *o primeiro axioma de enumerabilidade* quando todo $x \in \Omega$ tem uma base de vizinhanças enumerável;
b) Diremos que Ω satisfaz o *o segundo axioma de enumerabilidade* quando a topologia τ tem um base enumerável;
c) O espaço Ω será dito *Lindelöf* quando toda cobertura de Ω possuir uma subcobertura enumerável;
d) Finalmente, diremos que Ω é *separável* sempre que Ω admitir uma conjunto enumerável denso.

PROPOSIÇÃO 10.3. *Em espaços métricos: Separável $\Rightarrow$ base enumerável $\Rightarrow$ Lindelöf $\Rightarrow$ separável.*

DEMONSTRAÇÃO. <u>Prova de: Separável $\Rightarrow$ base enumerável:</u> Se $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um conjunto denso em Ω então é fácil ver que se $\{q_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ é uma enumeração dos racionais então $\{B_d(x_n, q_m)\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ é uma base enumerável para τ.]

<u>Prova de: base enumerável $\Rightarrow$ Lindelöf:</u> Seja $\mathscr{F}$ uma cobertura de Ω e $\mathscr{B}$ uma base enumerável para Ω. Defina

$$\mathscr{B}_{\mathscr{F}} = \{B \in \mathscr{B} : B \subset A \text{ para algum } A \in \mathscr{F}\}.$$

Sendo $\mathscr{B}$ uma base temos que todo elemento de $\mathscr{F}$ pode ser escrito como uma união contável de elementos de $\mathscr{B}$, portanto $\mathscr{B}_{\mathscr{F}}$ é uma cobertura enumerável de Ω. Agora, para cada $B_j \in \mathscr{B}_{\mathscr{F}}$ escolha $A_j \in \mathscr{F}$ tal que $B_j \subset A_j$. Então temos que $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Donde segue o resultado.

□

AULA 12

Espaços Conexos

Definição 12.1. Um espaço topológico Ω é dito *desconexo* se existem conjuntos abertos, disjuntos e não vazios A, B tais que $\Omega = A \cup B$. Caso contrário diremos que Ω é *conexo*. Um subconjunto $S \subset \Omega$ é dito desconexo se com a topologia induzida S é desconexo. Caso contrário diremos que S é conexo.

Exemplo 12.2. Cada intervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}$ é conexo. De fato, suponha que o intervalo $[a, b]$, $a < b$ seja desconexo. Então podemos escrever $[a, b] = A \cup B$ onde A e B são dois abertos não vazios de $[a, b]$. Suponha sem perda de generalidade que $b \in B$. Como B é aberto tem-se que $(b - \epsilon, b] \subset B$ para algum $\epsilon > 0$. Seja $c = \sup A$, pela observação precedente devemos ter que $c < b$ e que $(c, b] \subset B$. Caso $c \in A$, como A é aberto, deve existir $\epsilon > 0$ tal que $[c, c + \epsilon) \subset A$, contrariando o fato de $c = \sup A$. Assim $c \in B$. Se $a < c$, sendo B aberto deve existir $\epsilon > 0$ tal que $(c - \epsilon, c] \subset B$, contrariando o fato de $c = \sup A$. Concluímos que $c = a$, assim $[a, b] = [c, b] \subset B$, outro absurdo. Portanto $[a, b]$ é conexo.

Proposição 12.3. *Um espaço topológico (Ω, τ) é conexo se e semente se Ω e $\varnothing$ são os únicos subconjuntos de Ω simultaneamente abertos e fechados.*

Proposição 12.4. *A imagem de um espaço conexo por aplicação contínua é um espaço conexo.*

Corolario 12.5. *Teorema do valor intermediário.*

Exercício 12.1. Prove que a imagem contínua de um espaço conexo é um espaço conexo.

Exercício 12.2. a) Mostre que se S é conexo então $\overline{S}$ também o é. b) Se S é conexo e $S \subset D \subset \overline{S}$ então D é conexo.

Proposição 12.6. *Seja (Ω, τ) um espaço topológico. Suponha que $\Omega = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$, onde cada S_α é conexo e $\bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha \neq \varnothing$. Então Ω é conexo.*

Demonstração. Suponha $\Omega = A \cup B$ onde A e B são abertos e disjuntos de Ω. Note que para cada $\alpha \in I$, temos que $S_\alpha \subset A$ ou $S_\alpha \subset B$, caso contrário S_α não seria conexo. Agora seja $x \in \bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha$, se $x \in A$, então devemos ter pela observação acima que $S_\alpha \in A$ para todo $\alpha \in I$ donde $B = \varnothing$. Um raciocínio análogo caso $x \in B$ mostra que $A = \varnothing$. Logo Ω é conexo. $\square$

Exercício 12.3. a)Mostre que $\mathbb{R}$ é conexo. b) Mostre que $\mathbb{R}^n$ é conexo.

Exercício 12.4. Seja (Ω, τ) um espaço topológico. Suponha que cada par de pontos $x, y \in \Omega$ pertença a um conjunto conexo $S_{xy} \subset \Omega$. Então Ω é conexo.

PROPOSIÇÃO 12.7. *Sejam* (Ω_1, τ_1) *e* (Ω_2, τ_2) *espaços topológicos não vazios. Então o produto Então o produto cartesiano* $\Omega_1 \times \Omega_2$ *é conexo se e somente se* Ω_1 *e* Ω_2 *são conexos conexo.*

DEMONSTRAÇÃO. Sendo o produto $\Omega_1 \times \Omega_2$ conexo e as projeções π_1, π_2 contínuas então pelo exercício ?? temos que $\pi_1(\Omega_1 \times \Omega_2) = \Omega_1$ e $\pi_2(\Omega_1 \times \Omega_2) = \Omega_2$ são conexos.

Reciprocamente suponha que Ω_1 e Ω_2 sejam conexos. Fixe $y \in \Omega_2$ e para cada $x \in \Omega_1$ defina $U_x = (\{x\} \times \Omega_2) \cup (\Omega_1 \times \{y\})$. Note que para cada $x \in \Omega_1$ o cojunto U_x é a união dos dois conjuntos conexos $\{x\} \times \Omega_2$ e $\Omega_1 \times \{y\}$ e que $(\{x\} \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times \{y\}) = \{(x, y)\}$, assim sendo seegue da proposição ?? que U_x é conexo.

Agora note que $\Omega_1 \times \Omega_2 = \bigcup_{x \in \Omega_1} U_x$ e que $\bigcap_{x \in \Omega_1} = \Omega_1 \times \{y\} \neq \varnothing$. Portanto pela proposição?? segue o resultado. □

EXERCÍCIO 12.5. Complete a demonstração acima mostrando que $\{x\} \times \Omega_2$ é homemorfo a Ω_2 e que $\Omega_1 \times \{y\}$ é homeomorfo a Ω_1.

EXERCÍCIO 12.6. Mostre que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ com a topologia das caixas não é conexo. Sugestão: Decomponha $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ no conjunto das sequências limitadas e das sequências não limitadas.

PROPOSIÇÃO 12.8. *Seja* $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. Então o produto* $\prod_{\alpha \in I} \Omega_\alpha$ *é conexo se e somente se cada* Ω_α *é conexo.*

DEMONSTRAÇÃO. □

1. Lista de exercícios

1. Um espaço topológico Ω é dito ser *totalmente desconexo* quando os únicos subconjuntos conexos de Ω são os conjuntos unitários. Mostre que se Ω está equipado com a topologia discreta então Ω é totalmente desconexo. A recíproca vale?
2. Mostre que se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de subespaços conexos de um espaço topológico Ω, tais que $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$ para todo n. Mostre que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ é conexo.
3. O espaço $\mathbb{R}_\ell$ é conexo?
4. Mostre que um espaço topológico Ω é contínua se e somente se as únicas funções $f : \Omega \to \{0, 1\}$ contínuas são as constantes.
5. Seja Ω um espaço topológico e suponha que para cada par de pontos x, y existe um subconjunto conexo S_{xy} de Ω contendo x e y, então Ω é conexo.
6. Mostre que para $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ é conexo.
7. Mostre que $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$, onde $\mathbb{Q}^2$ representa o conjunto de todos os pontos de coordenadas racionais, também é conexo.
8. Prove que $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}$ não são homeomorfos para todo $n \geq 2$
9. Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço de codimensão ≥ 2. Mostre que $\mathbb{R}^n \setminus E$ é conexo.

AULA 13

Compacidade

DEFINIÇÃO 13.1. Um espaço topológico Ω é dito *compacto* quando toda cobertura aberta de Ω admite uma subcobertura finita. Um subconjunto $K \subset \Omega$ é dito um *subconjunto compacto* quando K com a topologia induzida for compacto.

EXERCÍCIO 13.1. Seja $K \subset \Omega$, então K é compacto se e somente se toda cobertura de K por abertos de Ω admite uma subcobertura finita.

EXEMPLO 13.2. A reta $\mathbb{R}$ não é compacta. De fato considere a cobertura $\mathscr{F} = \{(n, n+2), n \in \mathbb{Z}\}$, é fácil ver que $\mathscr{F}$ não tem subcobertura finita.

EXEMPLO 13.3. O seguinte subconjunto de $\mathbb{R}$ é compacto: $\Omega = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\}$.

DEFINIÇÃO 13.4. Diremos que um espaço topológico tem a *propriedade da intersecção finta* (p.i.f) se e somente se para qualquer família de conjuntos fechados $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ como a propriedade de que: $F_{\alpha_1} \cap \cdots \cap F_{\alpha_k} \neq \varnothing$ para todos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in I$, tem-se que $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \neq \varnothing$.

PROPOSIÇÃO 13.5. *Um espaço topológico Ω é compacto se e somente se tem a propriedade da intersecção finita.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma família de abertos. Associamos a essa família a seguinte família de fechados: $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$, onde $F_\alpha = \Omega \setminus U_\alpha$. Então temos que $F_{\alpha_1} \cap \cdots \cap F_{\alpha_i} \neq \varnothing$ se e somente se $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^k$ não é uma cobertura de Ω, enquanto pela p.i.f $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \neq \varnothing \Leftrightarrow \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \neq \Omega$. Portanto, a propriedade da intersecção finita diz que se nenhuma subfamília finita de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ é uma cobertura então $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ também não é uma cobertura, o que é a contrapositiva da definição de compacidade. $\square$

PROPOSIÇÃO 13.6. *Seja Ω um espaço topológico compacto. Então temos o seguinte:*

a) *Todo subconjunto $F \subset \Omega$ fechado também é compacto;*
b) *Se Ω for Hausdorff e $K \subset \Omega$ for um subconjunto compacto então K é fechado em Ω;*
c) *Todo espaço compacto Hausdorff é normal;*

DEMONSTRAÇÃO. Prova de a): Seja $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma cobertura aberta de F. Então existem abertos U_α de Ω tais que $V_\alpha = F \cap U_\alpha$. Note que $\{\Omega \setminus F\} \cup \{U_\alpha\}$ é uma cobertura aberta de Ω, portanto existem indíces $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que $\{\Omega \setminus F\} \cup \{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ é uma subcobertura finita de Ω. Portanto $\{V_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ é uma subcobertura finita de F.

Prova de b): Para provar o desejado vamos precisar usar o seguinte fato: em um espaço Hausdorff dado um compacto K e um ponto $x \notin K$, existem abertos disjuntos U_x e V_x tais que $x \in U_x$ e $K \subset V_x$. De fato, fixado $x \notin K$ e $y \in K$, obtemos, pois Ω é Hausdorff, abertos disjuntos $U_{xy} \ni x$ e $V_{xy} \ni y$. Assim temos que $\{V_{xy}\}_{y\in K}$ é uma cobertura aberta de K. Usando a compacidade de K obtemos $y_1, \ldots, y_n$ tais que

$$K \subset V_{xy_1} \cup \cdots \cup V_{xy_n} \equiv V.$$

Defina $U_x \equiv U_{xy_1} \cap \cdots U_{xy_n}$ note que U_x é aberto pois é a intersecção finita de abertos e que $U_x \cap V_x = \varnothing$. Provando a afirmação.

Com isso em mãos podemos proceder à prova de b). Para cada $x \notin K$ tome $U_x \ni x$ e $V_x \supset K$ abertos disjuntos. Então $\Omega \setminus K = \bigcup_{x\in\Omega\setminus K} U_x$ é aberto, donde K é fechado.

Prova de c): Sejam K e L fechados em Ω, pelo item a) são ambos compactos. Usando o fato que provamos na prova de b) para cada $x \in L$, temos abertos disjuntos $U_x \ni X$ $V_x \supset K$. Então, $\{U_x\}_{x\in L}$ é uma cobertura de L, por compacidade existem $x_1, \ldots x_n$ tais que $B \subset U \equiv U_{x_1} \cup \cdots U_{x_n}$. Tomando $V \equiv \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$ temos que U e V são abertos disjuntos $K \subset V$ e $L \subset U$

□

DEFINIÇÃO 13.7. Um espaço topológico Ω é dito *fracamente sequencialmente compacto* (f.s.c) se toda sequência em Ω tem um ponto de acumulação. Se toda sequência tem uma subsequência convergente diremos que Ω é *sequêncialmente compacto.* Note que em espaços métricos essas duas noções coincidem.

EXERCÍCIO 13.2. Mostre que um espaço métrico é *fracamente sequencialmente compacto* se e somente se é sequêncialmente compacto. Se Ω for apenas um espaço topológico, qual dessas noções implica a outra? Dê um exemplo de um espaço não metrizável em que essas noções não coincidem.

PROPOSIÇÃO 13.8. *Todo espaço topológico compacto é fracamente sequencialmente compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em um espaço compacto Ω. Suponha que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não tenha ponto de acumulação (em particular $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é não eventualmente constante). Então para cada $x \in \Omega$ existe uma vizinhaça aberta U_x de x contendo apenas um número finito de termos de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Veja que $\{U_x\}_{x\in\Omega}$ é uma cobertura aberta de Ω por compacidade deve existir $x_1, \ldots, x_n$ em Ω tais que $\Omega = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$. Mas isso implica que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem apenas um número finito de termos, o que é absurdo. □

EXERCÍCIO 13.3. Seja $\Omega = \{0, 1\}$ e considere em Ω a topologia $\tau = \{\varnothing, \Omega\}$. Equipe $\mathbb{N}$ com a topologia discreta e considere o produto $\mathbb{N} \times \Omega$. Use esse exemplo para mostrar que a reciproca da proposição acima não é verdadeira.

DEFINIÇÃO 13.9. Um espaço merico (Ω, d) é dito *totalmente limitado* se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existe um conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \Omega$ tal que $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^n B_d(x_i, \epsilon)$.

PROPOSIÇÃO 13.10. *Seja* (Ω, d) *um espaço métrico. Então temos o seguinte:*

a) *Todo espaço métrico totalmente limitado é separável;*
b) *Todo espaço métrico totalmente limitado é sequencialmente compacto.*

Demonstração. Prova de a): Para cada n considere o conjunto $\{x_j^{(n)}\}_{j=1}^{N_n}$ tal que $\Omega = \bigcup_{j=1}^{N_n} B_d(x_j^{(n)}, 1/n)$. Afirmamos que $\{x_j^{(n)}\}_{j=1,\ldots,N_n; n\in\mathbb{N}}$ é denso em Ω. Com efeito, seja $x \in \Omega$ e $U \ni x$ um aberto, então existe n tal que $B_d(x, 1/n) \subset U$. Agora veja que pela construção de $\{x_j^{(n)}\}_{j=1}^{N_n}$ existe j tal que $x \in B_d(x_j^{(n)}, 1/n)$, assim $x_j^{(n)} \in B_d(x, 1/n)$. Portanto $\overline{\{x_j^{(n)}\}} = \Omega$.

Prova de b): Seja $\{y_m\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em Ω. Considere $\{x_j^{(n)}\}_{j=1}^{N_n}$ a sequência definida no item anterior. O princípio da casa dos pombos garante que pelo menos uma das bolas $B_d(x_j^{(1)}, 1)$, $j = 1, \ldots, N_n$, contém infinitos termos de $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, escolha uma dessas bolas e denote-a por B_1. Portanto existe uma subsequência $\{y_n^{(1)}\} \subset B_1$. Usando indução obtemos uma bola B_ℓ de raio $1/\ell$ e uma subsequência $\{y_m^{(\ell)}\}$ em B_ℓ. Então a subsequência $z_\ell \equiv y_\ell^{(\ell)}$, tem a propriedade de que $\{z_j\}_{j=\ell}^{\infty} \subset B_\ell$. Portanto temos que $d(z_m, z_j) < 1/\ell$ sempre que $m, j \geq \ell$, ou seja, $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, assim existe z tal que $z_j \to z$. Portanto z é limite de uma subsequência de $\{y_m\}_{n\in\mathbb{N}}$. □

Teorema 13.11. *Em um espaço métrico* (Ω, d) *as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) Ω é compacto;
b) Ω é sequencialmente compacto;
c) Ω é completo e totalmente limitado.

Demonstração. a)$\Rightarrow$ b): Isso é o conteúdo da Proposição 13.8.

b)$\Rightarrow$ c): Dado $\epsilon > 0$ suponha que para quaisquer $\{x_1, \ldots, x_N\}$ tenhamos que $\bigcup_{i=1}^{N} B_d(x_i, \epsilon) \neq \Omega$. Vamos construir uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que não possui nenhuma subsequência convergente. Para, isso escolha, x_1 arbitrariamente e indutivamente escolha x_{n+1} de modo que $x_{n+1} \notin \bigcup_{i=1}^{n} B_d(x_n, \epsilon)$. Assim $d(x_n, x_m) \geq \epsilon$ para todos $n \neq m$. Concluímos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não possui subsequência convergente, o que uma contradição com a hipótese.

c)$\Rightarrow$ a): A proposição 13.10 garante que sendo Ω completo e totalmente limitado então Ω é separável. Logo, pela proposição 10.3 Ω é Lindelöf, ou seja, toda cobertura aberta de Ω admite uma subcobertura enumerável. Assim, seja $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma cobertura enumerável de Ω, tal que nehuma subcoleção finita $\{U_1, \ldots, U_n\}$ seja uma subcobertura de Ω.

Seja $A_n = \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{n} U_n \neq \varnothing$ é fechado e $A_n \supset A_{n+1}$. Para cada n escolha $x_n \in A_n$. isso fornece uma sequência $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ que pelo item b) da proposição anterior tem um ponto de acumulação x. Visto que $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset A_n$ para todo n, e cada A_n é fechado, concluímos que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, absurdo. Logo $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subcobertura finita. □

EXERCÍCIO 13.4. Considere o cubo de Hilbert $C = [0,1]^{\mathbb{N}}$ equipado com a métrica produto, i.e, $d(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n - y_n|/n\}$.

a) Mostre que nessa topologia bolas $B_d(x,r)$ são conjuntos da forma $\prod_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, nr)$ (aqui B sem o índice indica a bolas de $[0,1]$ relativas ao valor absoluto);
b) Mostre que C é completo;
c) Verifique que C é totalmente limitado e conclua que C é compacto.

DEFINIÇÃO 13.12. Seja Ω um espaço topológico, diremos que $A \subset \Omega$ é pré-compacto quando $\overline{A}$ for compacto.

PROPOSIÇÃO 13.13. *Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto (na topologia usual) se e somente se é fechado e limitado.*

DEMONSTRAÇÃO. Sendo A compacto, então pela proposição 13.6 A é fechado, e pela proposição 13.11 A é totalmente limitado. Portanto existe um conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_N\}$ tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, 1)$. Assim sendo $A \subset B(0,r)$ onde $r = 1 + \max\{|x_1|, \ldots, |x_N|\}$. Portando A é limitado e fechado.

Reciprocamente, sendo A fechado e limitado, temos em particular que A é completo (todo subconjunto fechado de um espaço métrico completo é ainda completo com a topologia induzida.)

O resultado estará provado se mostrarmos que A é totalmente limitado. Pois bem, como A é limitado existe $r > 0$ tal que $A \subset B(0,r)$, em particular A está contido no cubo C de centro 0 e lado $2r$. Então $\epsilon > 0$ escolha $\delta > 0$ tal que $\delta\sqrt{n} < \epsilon$. Considere o conjunto $\mathcal{L}_\delta = \{\delta \boldsymbol{m} : \boldsymbol{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^m\}$, note que $\mathcal{L}_\delta$ tem máximo $\lfloor \frac{2r+1}{\delta} \rfloor^n$ pontos, e que centrando em cada um desses pontos um cubo de lado δ obtemos uma cobertura de C. Para encerrar note que cada um desses cubos está contido numa bola de raio ϵ, assim A é seguramente coberto por $\lfloor \frac{2r+1}{\delta} \rfloor^n$ bolas de raio ϵ. Portanto A é totalmente limitado, assim, segue do teorema 13.11 que A é compacto.

□

DEFINIÇÃO 13.14. Sejam (Ω_1, d_1) e (Ω_2, d_2) espaços métricos. Diremos que uma função $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ é *uniformemente contínua* quando dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in \Omega_1, d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y) < \epsilon.$$

PROPOSIÇÃO 13.15. *Sejam Ω_1 e Ω_2 espaços métricos com Ω_1 compacto. Então qualquer função contínua $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ é uniformemente contínua.*

TEOREMA 13.16. *Sejam Ω_1 e Ω_2 espaços topológicos com Ω_1 compacto. Então temos o seguinte:*

a) *Se $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ é contínua então $f(\Omega_1)$ é compacto em Ω_2;*
b) *Se Ω_2 é Hausdorff e $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ é contínua e bijetiva, então f é um homemorfismo.*

DEMONSTRAÇÃO. Prova de a): Seja $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ uma cobertura aberta de $f(\Omega_1)$. Como cada $V_\alpha = U_\alpha \cap f(\Omega_1)$, onde U_α é aberto em Ω_2, tem-se pela continuidade de f que $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ é uma cobertura aberta do compacto Ω_1. Extraindo uma subcobertura finita $\{f^{-1}(U_{\alpha_1}), \ldots, f^{-1}(U_{\alpha_n})\}$ de Ω_1 concluímos que $\{V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n}\}$ é uma cobertura de $f(\Omega_1)$. Portanto $f(\Omega_1)$ é compacto.

Prova de b): É suficiente mostrarmos que f envia fechados em fechados. Seja F fechado em Ω_1, temos pela proposição 13.6 item a) que F é compacto, então pelo item anterior temos que $f(F)$ é compacto em Ω_2. Como Ω_2 é Hausdorff segue da proposição 13.6 item b) que $f(F)$ é fechado. □

Teorema 13.17. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua onde Ω é um espaço topológico compacto. Então f tem máximo e mínimo.*

Demonstração. Pela teorema anterior, $f(\Omega)$ é compacto em $\mathbb{R}$ e portanto é fechado e limitado. Logo $f(\Omega)$ contém seu supremo e seu ínfimo. □

Exercício 13.5. Seja Ω um espaço compacto Hausdorff. Seja $f : \Omega \cup \{\infty\}$ uma função semicontínua inferiormente. Então f é limitada inferiormente, i.e, $\inf_{x\in\Omega} f(x) > -\infty$, e existe $x \in \Omega$ tal que $f(x) = \inf_{x\in\Omega} f(x)$.

1. Lista de Exercícios

1. Considere $[0,1]^{\mathbb{N}}$ com a topologia uniforme. Encontre nesse espaço um subconjunto infinito sem pontos de acumulação.
2. Mostre que $[0,1]$ como subespaço de $\mathbb{R}_\ell$ não é f.s.c.
3. Mostre que o círculo $S^1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ com a topologia induzida de $\mathbb{R}^2$ é compacto.
4. Mostre que $[0,1]$ não é compacto como subespaço de $\mathbb{R}_K$.
5. Seja $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, uma sequência convergente com limite x, mostre que $\{x, x_n, n \in \mathbb{N}\}$ é compacto.
5. Qualquer espaço métrico compacto Ω é homemorfo a algum subconjunto do cubo de Hilbert. (Sugestão: Ω é separável (justifique), então seja, $\{x_1, x_2, \ldots\}$ um subconjunto denso em Ω. Defina $F : \Omega \to C$ pondo $F(x) = (d(x,x_1), d(x,x_2), \ldots)$, mostre que F é o homeomorfismo desejado).

Universidade de Brasília

TOPOLOGIA GERAL $0^{\underline{o}}$/2019 — LISTA DE EXERCÍCIOS 1

TURMA A — 24/01/2019

PROBLEMA 1 (INFINITUDE DOS PRIMOS): Considere o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$. Defina para cada par de números inteiros m, n, onde $m \neq 0$ o conjunto

$$A_{m,k} = \{mn + k, n \in \mathbb{Z}\}.$$

a) Prove que intersecções de dois conjuntos da forma $A_{m,k}$ é um conjunto da forma $A_{m',k'}$. Conclua que a família $\{A_{m,k},\ m, n \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$ é uma base para uma topologia em $\mathbb{Z}$ (chamada de topologia de Furstenberg);

b) Prove que cada $A_{m,k}$ é simultaneamente fechado e aberto (clopen) na topologia de Furstemberg;

c) Prove que cada conjunto aberto não vazio na topologia de Furstenberg é infinito;

d) Considere $P \subset Z$ o conjunto dos números primos (1 não é primo!). Seja $B = \bigcup_{p \in P} A_{p,0}$, quem é B?

e) Mostre que se P for finito então B é aberto

f) Conclua que P é infinito.

PROBLEMA 2(AXIOMAS DE KURATOWSKI):

a) Seja (Ω, τ) um espaço topológico. Prove que o *operador fecho* $A \mapsto \overline{A}$ tem as seguintes propriedades:

i) $\overline{\varnothing} = \varnothing$, ii) $A \subset \overline{A}$ iii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ e iv) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

b) Seja Ω um conjunto. Suponha que uma aplicação $F : \mathscr{P}(\Omega) \to \mathscr{P}(\Omega)$ tem as propriedades i)-iv) listadas acima, i.e: i) $F(\varnothing) = \varnothing$, ii) $A \subset F(A)$ iii) $F(F(A)) = F(A)$ e iv) $F(A \cup B) = F(A) \cup F(B)$. Mostre que existe uma única topologia τ tal que F seja o operador fecho para τ.

c) Considere $\Omega = \mathbb{N}$ e $F : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ dada por $F(A) = \overline{A} = \{k \cdot A, k \in \mathbb{N}\}$. Mostre que F satisfaz as propriedades i)-iv) listadas no item anterior. Sendo τ a também a topologia referida no item anterior, descreva os conjuntos fechados e os conjuntos abertos de $(\mathbb{N}, \tau)$.

d) Considere em $\mathbb{N}$ a topologia dada pelo item anterior. Mostre que uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é contínua, se e somente se, cada vez que $m|n$ tem-se que $f(m)|f(n)$.

Problema 3(Números de Liouville): Diremos que um número real ξ é de Liouville quando, para cada $n \geq 1$ existe um racional $p/q,\ q > 1$ tal que

$$0 < \left|\frac{p}{q} - \xi\right| < \frac{1}{q^n}.$$

a) Mostre que o conjunto L dos números de Liouville é um G_δ;

b) Conclua que L é não enumerável.

Universidade de Brasília

Topologia Geral $0^{\underline{o}}$ /2019 | Lista de Exercícios 2

Turma A | 07/02/2019

Problema 1: Seja $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Para cada $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ defina

$$T(f) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy.$$

Mostre que $T(f) \in C([0,1],\mathbb{R})$ e que $\{T(f), \|f\| \leq 1\}$ é precompacto em $C([0,1],\mathbb{R})$.

Problema 2: Seja (Ω, d) um espaço métrico. Uma função $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ é dita *α-Hölder contínua* ($\alpha > 0$) quando a quantidade abaixo é finita

$$\mathrm{Hol}_\alpha(f) = \sup_{x \neq y} \frac{f(x) - f(y)}{d(x,y)^\alpha}.$$

Mostre que se o espaço métrico Ω é compacto, então o conjunto $\{f \in C(\Omega, \mathbb{R}) : \|f\| \leq 1,\ \mathrm{Hol}_\alpha(f) \leq 1\}$ é compacto em $C(\Omega, \mathbb{R})$ na métrica uniforme.

1.2 Resultados auxiliares

Observação (O.1). Usaremos implicitamente várias vezes aqui que a união é distributiva sobre a interseção e que a interseção é distributiva sobre a união.

Definição (D.1). Uma cisão não trivial de Ω é um par U, V de abertos não vazios e disjuntos de Ω cuja união é igual a Ω. Uma cisão trivial de Ω é um par de abertos disjuntos onde um deles é vazio e o outro é o Ω. Ω é dito conexo se não existe nenhuma cisão não trivial de Ω e desconexo caso contrário.

Definição (D.2). Diremos que Ω é conexo por caminhos se para todo $x, y \in \Omega$ existe uma função contínua $f : [a, b] \to \Omega$ (que chamaremos de caminho) indo dum fechado da reta em Ω tal que $f(a) = x$ e $f(b) = y$.

Definição (D.3). Diremos que $p \in \Omega$ é um ponto de acumulação da sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ se para toda vizinhança aberta U de p e para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n_1 > n_0$ tal que $x_{n_1} \in U$.

Observação (O.2). Assumiremos que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de Ω é uma função $f : \mathbb{N} \to \Omega$ tal que $f(1) = x_1$ e assim por diante.

Observação (O.3). Com essa definição, um ponto de acumulação de uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não precisa ser um ponto de acumulação de $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$ (considere a sequência que alterna entre 0 e 1 no compacto $[0, 1]$), e a recíproca também não vale (ver a próxima observação).

Observação (O.4). **Definição do Munkres**: Diremos que um espaço topológico Ω é acumuladamente compacto (limit point compact) se todo subconjunto infinito de Ω tem ponto de acumulação.

Observação (O.5). **Definição das notas de aula**: Diremos que um espaço topológico Ω é fracamente sequencialmente compacto se toda sequência $f : \mathbb{N} \to \Omega$ tem ponto de acumulação.

Observação (O.6). A definição do Munkres é mais fraca do que a das notas de aula que exige que toda sequência em Ω tenha ponto de acumulação: considere a sequência em $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ (onde o primeiro tem a topologia discreta e o segundo a indiscreta) dada por $x_1 = (1, 0), x_2 = (1, 1), x_3 = (2, 0), x_4 = (2, 1), \cdots$, que não tem ponto de acumulação, mas todo $S \subset \Omega$ não vazio (em particular se S é infinito) tem ponto de acumulação (a prova disso é o mesmo argumento usado no exercício 3 das caixas de compacidade). Porém note que as duas definições são equivalentes se Ω satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade (ou até mesmo se satisfaz pelo menos que subconjuntos finitos sejam fechados).

Observação (O.7). Ser fracamente sequencialmente compacto é equivalente a ser enumeravalmente compacto (i.e, toda cobertura aberta enumerável tem uma subcobertura aberta finita) e também implica em ser acumuladamente compacto (mas a recíproca só vale se o espaço satisfizer pelo menos que subconjuntos finitos sejam fechados).

Lema (L.1). *Se $C \cup D = \Omega$ é uma cisão não trivial de Ω e Y é um subespaço conexo de Ω, então ou $Y \subset C$ ou $Y \subset D$.*

Demonstração: Note que $C \cap Y$ e $D \cap Y$ são abertos disjuntos de Y cuja união é todo Y, então pela hipótese de conexidade de Y um deles é vazio e outro é todo o Y.

■

Lema (L.2). *Qualquer conjunto conexo por caminhos é conexo.*

Demonstração: Suponha por absurdo que Ω é conexo por caminhos mas não é conexo. De fato, se $\Omega = A \cup B$ é uma cisão de Ω, então se $f : [a, b] \to \Omega$ é um caminho arbitrário, como $f([a, b])$ é a imagem contínua de um conexo, também é conexo, e usando o lema **(L.1)**, temos que $f([a, b])$ ou está contido em A ou em B, de forma que não existe nenhum caminho de um ponto de A até um ponto de B, uma contradição.

■

Lema (L.3). *Seja $\mathscr{A}$ uma cobertura aberta do espaço métrico (Ω, d). Se Ω é sequencialmente compacto, existe $\delta > 0$ tal que todo subconjunto de Ω com diâmetro menor que δ está contido em algum elemento de $\mathscr{A}$.*

Demonstração: Suponha por absurdo que Ω seja sequencialmente compacto mas não existe δ nas condições do lema. Então, em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um conjunto C_n de diâmetro menor que $\frac{1}{n}$ que não está contido em nenhum elemento de $\mathscr{A}$. Para cada n, escolha um ponto $x_n \in C_n$. Por hipótese, alguma subsequência $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ da sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para algum ponto a. Como $\mathscr{A}$ é cobertura, existe $A \in \mathscr{A}$ tal que $a \in A$. Como A é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(a, \epsilon) \subset A$. Tomando i grande o suficiente de forma que $\operatorname{diam}(C_{n_i}) = \frac{1}{n_i} < \frac{\varepsilon}{2}$ e $d(x_{n_i}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$, temos (pela desigualdade triangular) que $C_{n_i} \subset B_d(x_{n_i}, \frac{\varepsilon}{2}) \subset B_d(a, \varepsilon) \subset A$, uma contradição.

■

Lema (L.4). *Seja (Ω, d) um espaço métrico sequencialmente compacto. Então, $\forall \varepsilon > 0$, existe uma cobertura finita que consiste de bolas abertas de raio ε.*

Demonstração: Iremos provar a contrapositiva da afirmação, isto é, se existe $\varepsilon > 0$ tal que Ω não admite nenhuma cobertura finita de bolas abertas de raio ε, então Ω não é sequencialmente compacto. De fato, se existe tal ε, podemos construir uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que não possui nenhuma subsequência convergente da seguinte maneira: tome $x_1 \in \Omega$ arbitrário e escolha x_2 de forma que $x_2 \notin B_d(x_1, \varepsilon)$ (por hipótese podemos fazer isso, senão $B_d(x_1, \varepsilon)$ seria uma cobertura finita de Ω). Em geral, dados $x_1, \cdots, x_n$, tome $x_{n+1} \in \Omega$ de forma que:

$$x_{n+1} \notin B_d(x_1, \varepsilon) \cup B_d(x_2, \varepsilon) \cup \cdots \cup B_d(x_n, \varepsilon)$$

(e novamente, a hipótese garante que possamos fazer isso). É óbvio que, por construção, $d(x_{n+1}, x_i) \geq \varepsilon$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$, e de fato nenhuma subsequência dessa sequência pode convergir: dado qualquer x_n, $B_d(x_n, \frac{\varepsilon}{2})$ contém no máximo um termo da sequência, o próprio x_n.

■

Lema (L.5). *Seja (Ω, d) um espaço métrico e $S \subset \Omega$. Então $x \in \Omega$ é ponto de acumulação de S se, e só se, para todo $\varepsilon > 0$, $S \setminus \{x\} \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$, isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $y \neq x \in S$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$.*

Demonstração: A ida segue diretamente da definição de ponto de acumulação (pois $B(x, \epsilon)$ é um aberto de Ω contendo x) e a volta diretamente do fato de que dado $x \in \Omega$ qualquer aberto $U \ni x$ da topologia gerada por d contém alguma bola de raio ϵ, e portanto $U \cap S \setminus \{x\} \neq \emptyset$.

Observação (O.8). É fácil ver que esse lema também é equivalente a: x é ponto de acumulação de $S \iff$ toda vizinhança aberta de x intersecta S em infinitos pontos distintos.

■

Lema (L.6). *Qualquer espaço métrico compacto (Ω, d) é separável.*

Demonstração: Sabemos que todo espaço métrico compacto (Ω, d) é totalmente limitado, de forma que para todo $n \in \mathbb{N}$ a cobertura $C_n = \left\{ B_d\left(x, \frac{1}{n}\right) \mid x \in \Omega \right\}$ admite uma subcobertura finita

$$F_n = \left\{ B_d\left(x_1, \frac{1}{n}\right), B_d\left(x_2, \frac{1}{n}\right), B_d\left(x_3, \frac{1}{n}\right), \cdots, B_d\left(x_k, \frac{1}{n}\right) \right\}$$

para alguns $x_1, \cdots, x_k \in \Omega$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $A_n = \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ o conjunto consistindo dos centros das bolas de F_n. Afirmamos que:

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

é um subconjunto enumerável de Ω. De fato, Ω é enumerável, pois é uma união enumerável de conjuntos finitos, e também é denso, pois dado qualquer aberto U não vazio de Ω e qualquer $x \in U$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(x, \varepsilon) \subset U$, e tomando $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \varepsilon$, então $B_d\left(x, \frac{1}{m}\right) \subset B_d(x, \varepsilon)$. Como F_m é uma subcobertura finita de Ω, existe $y \in A_m$ tal que $x \in B_d\left(y, \frac{1}{m}\right)$, logo $y \in B_d\left(x, \frac{1}{m}\right)$. Assim:

$$y \in B_d\left(x, \frac{1}{m}\right) \bigcap B_d(x, \varepsilon) \subset D \cap U \neq \emptyset$$

i.e, qualquer aberto não vazio de Ω intersecta D, como desejado.

■

Lema (L.7). *Se (Ω, d) é um espaço métrico, então $d : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ é contínua.*

Demonstração: Mostraremos que a imagem inversa de todo aberto U da reta é aberta em $\Omega \times \Omega$. De fato, se $U \subset \mathbb{R}$ é aberto, queremos mostrar que $d^{-1}(U) = \mathscr{O}$ é aberto, isto é, para todo $\mathfrak{o} \in \mathscr{O}$, existe um aberto básico B de $\Omega \times \Omega$ tal que $\mathfrak{o} \in B \subset \mathscr{O}$. Com efeito, note que se $(x, y) \in d^{-1}(U)$, então $d(x, y) = c \in U$, logo existe $\varepsilon > 0$ tal que $(c - \epsilon, c + \epsilon) \subset U$. Afirmamos que $B = B_d\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \times B_d\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ satisfaz o desejado. É óbvio que $(x, y) \in B$, resta mostar que $B \subset \mathscr{O}$. De fato, se $(x', y') \in B$, então note que:

$$\begin{aligned}
|d(x', y') - d(x, y)| &= |d(x', y') - d(x', y) + d(x', y) - d(x, y)| && (1)\\
&\leq |d(x', y') - d(x', y)| + |d(x', y) - d(x, y)| && (2)\\
&\leq d(y, y') + d(x, x') && (3)\\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} && (4)\\
&= \varepsilon && (5)
\end{aligned}$$

logo $d(x', y') \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset U$ e segue que $(x', y') \in \mathscr{O}$. Como (x, y) e (x', y') foram tomados arbitrariamente, o resultado segue.

■

Observação (O.9). Para ir de **(2)** para **(3)** note que novamente pela desigualdade triangular:

$$\begin{aligned}
d(x', y) - d(y, y') \leq d(x', y') \leq d(x', y) + d(y, y')\\
d(x, y) - d(x, x') \leq d(x', y) \leq d(x, x') + d(x, y)
\end{aligned}$$

Lema (L.8). *Se $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ é uma coleção de subespaços conexos de Ω e A é um subespaço conexo de Ω tal que $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in I$, então $A \cup \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \right)$ é conexo.*

Demonstração: Note que $A \cup A_\alpha$ é conexo pela proposição **(P.1)**. Então, novamente pela proposição **(P.1)**, $\bigcup_{\alpha\in I} \left(A \cup \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \right) \right) = A \cup \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \right)$ é conexo. Note que também poderíamos ter usado o lema **(L.1)** para mostrar que a única cisão é a trivial.

■

Lema (L.9). *Se A e B são subconjuntos próprios de X e Y, respectivamente, então $C = X \times Y \setminus A \times B$ é conexo.*

Demonstração: Fixe um $(a_1, a_2) \in C$ de forma que $a_1 \notin A$ e $a_2 \notin B$. Para cada $x \notin A$ defina $V_x = \{x\} \times Y$ e para cada $y \notin B$ defina $H_y = X \times \{y\}$. É claro que ambos são conexos pois são homeomorfos a X e Y, respectivamente. Defina $I = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \notin A \text{ e } y \notin B\}$, $D = V_{a_1} \cup H_{a_2}$ e para cada $\alpha \in I$ defina também $A_\alpha = V_{\pi_1(\alpha)} \cup H_{\pi_2(\alpha)}$. Note que:

(i) $D \cap A_\alpha = \{(\pi_1(\alpha), a_2), (a_1, \pi_2(\alpha))\} \neq \emptyset \ \forall \alpha \in I$

(ii) D é obviamente a união de subespaços conexos e não disjuntos, donde segue da proposição **(P.1)** que D é conexo. Analogamente, A_α é também conexo para cada $\alpha \in I$.

e o resultado segue do lema anterior.

■

2 Exercícios de conexidade

Questão 1. *Prove que a imagem contínua de um espaço conexo é um espaço conexo.*

Solução: Seja $f : X \to Y$ contínua e suponha que X é conexo. Sem perda de generalidade, podemos supor que f é sobrejetiva (caso não fosse, bastaria restringir o contradomínio ao espaço da imagem $Z = f(X)$, que preserva continuidade). Assim, suponha por absurdo que $Z = f(X) = Y = A \cup B$, i.e, é desconexo. Então, se tomarmos $x \in X$, ou $f(x) \in A$ ou $f(x) \in B$, de onde concluímos que $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ são abertos (pela hipótese de continuidade) disjuntos cuja união $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X$, ou seja, X é desconexo, um absurdo.

■

Questão 2. *Mostre que:*

(a) *se S é conexo, então $\overline{S}$ também o é.*

(b) *se S é conexo e $S \subset D \subset \overline{S}$, então D é conexo.*

Solução:

(a) Suponha que S seja conexo. Vamos mostrar que a única cisão de $\overline{S}$ é a trivial, isto é, se $\overline{S} = A \cup B$ e $A \neq \emptyset$, então $B = \emptyset$. De fato, temos $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$, e tomando $a \in A$, como $a \notin \overline{B}$, existe $U \ni a$ aberto tal que $U \cap B = \emptyset$, e como $a \in \overline{S}$, existe $x \in U \cap S \neq \emptyset$ com $x \notin B$, assim $x \in S \cap A \neq \emptyset$. Note que $S = (A \cap S) \cup (B \cap S)$, e pela hipótese de conexidade $B \cap S = \emptyset \implies B = \emptyset$.

(b) Suponha por absurdo que $D = A \cup B$ com A, B abertos disjuntos e não vazios. Pelo lema **(L.1)**, podemos assumir sem perda de generalidade que $S \subset A$, assim $\overline{S} \subset \overline{A}$. Como $\overline{A}$ e B são disjuntos, concluímos que $B = \emptyset$, uma contradição, logo D é conexo.

■

Questão 3. *Mostre que:*

(a) *com a topologia usual, $\mathbb{R}$ é conexo.*

(b) *com a topologia usual, $\mathbb{R}^n$ é conexo.*

Solução: Primeiramente, provaremos a seguinte:

Proposição (P.1). Seja (Ω, τ) um espaço topológico. Suponha que

$$\Omega = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha,$$

onde cada S_α é conexo e $\bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha \neq \emptyset$. Então Ω é conexo.

Demonstração: Suponha que $\Omega = A \cup B$, onde A e B são abertos disjuntos de Ω. Note que para cada $\alpha \in I$, temos que $S_\alpha \subset A$ ou $S_\alpha \subset B$, pois caso contrário S_α não seria conexo. Seja agora $x \in \bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha$. Se $x \in A$, segue da observação que acabamos de fazer que $S_\alpha \subset A$ seja qual for $\alpha \in I$, donde segue que $B = \emptyset$. *Mutatis mutandis*, vemos que se $x \in B$ então $A = \emptyset$. Portanto Ω é conexo.

■

(a) Temos $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$, uma união de subespaços da reta conexos e não disjuntos. O resultado segue da proposição **(P.1)**.

(b) Tome $v = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ com $||v|| = 1$ e seja L_v a reta de $\mathbb{R}^n$ passando pela origem e com vetor direcional v. É claro que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{||v||=1} L_v$, uma união de subespaços de $\mathbb{R}^n$ não disjuntos e conexos (pois são a imagem de $\mathbb{R}$ sob a função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(t) = tv$), e o resultado segue da proposição **(P.1)**.

■

Questão 4. *Seja (Ω, τ) um espaço topológico. Suponha que cada par de pontos $x, y \in \Omega$ pertença a um conjunto conexo $S_{xy} \subset \Omega$. Então Ω é conexo.*

Solução: Fixe algum $x \in \Omega$. Então é claro que $\Omega = \bigcup_{x \neq y \in \Omega} S_{xy}$, e o resultado segue da proposição **(P.1)**.

■

Questão 5. *Sejam (Ω_1, τ_1) e (Ω_2, τ_2) espaços topológicos não vazios. Fixe arbitrariamente $x \in \Omega_1$ e $y \in \Omega_2$. Mostre que $\{x\} \times \Omega_2$ é homeomorfo a Ω_2 e que $\Omega_1 \times \{y\}$ é homeomorfo a Ω_1.*

Solução: É claro que $f : \Omega_2 \to \{x\} \times \Omega_2$ definida por $f(t) = (x, t) \in \{x\} \times \Omega_2$ e $g : \Omega_1 \to \Omega_1 \times \{y\}$ definida por $g(t) = (t, y) \in \Omega_1 \times \{y\}$ são bijeções contínuas com inversas contínuas, como desejado.

■

Questão 6. *Mostre que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ com a topologia das caixas não é conexo. Sugestão: decomponha $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ no conjunto das sequências limitadas e das sequências não limitadas.*

Solução: Sejam $A = \{x = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists K \in \mathbb{R} \text{ tal que } x_n \leq K \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ ou } x_n \geq K \ \forall n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{x = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall M \in \mathbb{R} \ \exists n_M \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_{n_M} > M \text{ ou } \forall M \in \mathbb{R} \ \exists n_M \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_{n_M} < M\}$. É claro que A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ não vazios cuja união é o próprio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. De fato também são abertos, pois dado $x = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ou $x \in A$ ou $x \in B$, e sendo U um aberto básico de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ na topologia das caixas dado por:

$$U = (x_1 - 1, x_1 + 1) \times (x_2 - 1, x_2 + 1) \times \cdots$$

temos ou $x \in U \subset A$ ou $x \in U \subset B$.

■

Questão 7. *Um espaço topológico Ω é dito ser* totalmente desconexo *quando os únicos subconjuntos conexos de Ω são os conjuntos unitários. Mostre que se Ω está equipado com a topologia discreta então Ω é totalmente desconexo. A recíproca vale?*

Solução: Considerando a topologia discreta, qualquer $V \subset \Omega$ com mais de dois elementos é desconexo, pois fixado $x \in V$, $\{x\} \cup V \setminus \{x\} = V$ é uma união de abertos disjuntos cuja união é V. A recíproca não vale, um contra-exemplo é o exemplo 4 no parágrafo 23 do Munkres: os racionais com a topologia induzida da reta também são totalmente desconexos.

■

Questão 8. *Seja $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de subespaços conexos de um espaço topológico Ω que satisfaz $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ seja qual for $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ é conexo.*

Solução: Primeiro provaremos que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ é conexo para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, pela proposição **(P.1)**, temos que $A_1 \cup A_2$ é conexo, assim $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ também é conexo, também pela proposição **(P.1)**. Repetindo esse processo, temos que a união finita é conexa. Agora, afirmamos que

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

é conexo, onde $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. De fato, usando o lema 23.2 do Munkres e supondo que haja uma cisão $B = U \cup V$, mostraremos que ou $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$, isto é, B é conexo. Com efeito, como $B_1 \in B$ é conexo e $B_1 \subset B_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, então ou $B_1 \subset U$ e $B_n \subset U \ \forall n \in \mathbb{N} \implies U = B$ e $V = \emptyset$ ou $B_1 \subset V$ e $B_n \subset V \ \forall n \in \mathbb{N} \implies V = B$ e $U = \emptyset$.

■

Questão 9. *O espaço topológico $\mathbb{R}_\ell$ (id est, $\mathbb{R}$ com a topologia do limite inferior) é conexo?*

Solução: $\mathbb{R}_\ell$ não é conexo, pois $\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, \infty)$, uma união de abertos disjuntos na topologia do limite inferior que dá o $\mathbb{R}$ todo.

■

Questão 10. *Mostre que um espaço topológico Ω é conexo se, e somente se, as únicas funções $f : \Omega \to \{0, 1\}$ contínuas são as constantes.*

Solução: Primeiro provaremos a contrapositiva de conexo $\implies$ únicas funcões contínuas são constantes. De fato, se $f : \Omega \to \{0, 1\}$ é não constante e contínua, então, como $\{0, 1\}$ é clopen independente de sua topologia, por hipótese $f^{-1}(\{0, 1\})$ é um clopen não vazio de Ω, i.e, Ω é desconexo. Reciprocamente, se $\Omega = A \cup B$ com A e B abertos não vazios disjuntos, note que $f : \Omega \to \{0, 1\}$ definida pondo $f(x) = 0$ se $x \in A$ e $f(x) = 1$ se $x \in B$ é não constante e contínua.

■

Questão 11. *Mostre que para cada $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ é conexo.*

Solução: Sem usar conexidade por caminhos: Tome:

$$A = \{(\pi_1(x_1), \cdots, \pi_{n-1}(x_1)), (\pi_1(x_2), \cdots, \pi_{n-1}(x_2)), \cdots (\pi_1(x_k), \cdots, \pi_{n-1}(x_k))\}$$
$$B = \{\pi_n(x_1), \cdots, \pi_n(x_k)\}$$

e note que

$$(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}) \setminus (A \times B) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \cdots, x_k\} \subset \underbrace{\overline{(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}) \setminus (A \times B)}}_{= \mathbb{R}^n, \text{ pois } A \times B \text{ é finito}}$$

portanto o resultado segue do lema 8 e da b) do segundo exercício das caixas de conexidade.

Usando conexidade por caminhos: Iremos mostrar a condição mais forte de que $\mathbb{R}^n \setminus F$, onde $F \subset \mathbb{R}^n$ é finito, é conexo por caminhos (e é fácil ver que todo espaço conexo por caminhos é conexo). De fato, dado $x, y \in \mathbb{R}^n$, há uma quantidade infinita (*e não enumerável*) de retas passando por x que não intersectam F, escolha aleatoriamente alguma dessas retas e seja α a sua inclinação. É claro que também há uma quantidade infinita (*e não enumerável*) de retas passando por y com inclinação $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$ que não intersectam F, escolha também uma dessas retas e seja β a sua inclinação. Como L_α e L_β tem inclinações diferentes, sua interseção é não vazia. Basta então tomar algum p nessa interseção e notar que o caminho que vai de x a p contido em L_α e depois de p a y contido em L_β é contínuo. Note que poderíamos enfraquecer a condição de F ser finito, a prova também funciona se F for só enumerável.

■

Questão 12. *Mostre que $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ é conexo.*

Solução: Observe que $\mathbb{Q}^2$ é enumerável. A prova é idêntica à do exercício anterior (uma prova mais fácil é notar que dado dois pontos p, q com coordenadas irracionais, eles podem ser conectados pelo caminho que passa pelo ponto intermediário $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ por segmentos de retas horizontais e verticais).

■

Questão 13. *Mostre que $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}$ não são homeomorfos para todo $n \geq 2$.*

Solução: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é desconexo, mas para $n \geq 2$ tirar qualquer ponto de $\mathbb{R}^n$ ainda o deixa conexo. Como conexidade é um invariante topológico (ou seja, se dois espaços são homeomorfos ou ambos são conexos ou ambos são desconexos), o resultado segue.

■

Questão 14. *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço de codimensão ≥ 2. Mostre que $\mathbb{R}^n \setminus E$ é conexo.*

Solução:
Sem usar conexidade por caminhos: Suponha que $\mathrm{codim}(E) \geq 2$, ou, equivalentemente que $\dim(E) = j \leq n-2$. Faça uma mudança de base* de forma que:

$$v \in E \iff v = \left(\sum_{i=1}^{j} \phi_i e_i\right) + 0e_{j+1} + \cdots + 0e_n$$

para alguns $\phi_i, \cdots, \phi_j \in \mathbb{R}$, onde $\{e_1, \cdots, e_j\}$ é uma base de E e $\{e_{j+1}, \cdots, e_n\}$ é uma base do seu complemento ortogonal. Defina a família $\{A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_j}\}_{\alpha_1,\cdots,\alpha_j \in \mathbb{R}}$ da seguinte maneira:

$$\textit{Fixados } \alpha_1, \cdots, \alpha_j \in \mathbb{R}, \textit{ então } v \in A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_j} \iff v = \left(\sum_{i=1}^{j} \alpha_i e_i\right) + \beta_1 e_{j+1} + \cdots + \beta_{n-j} e_n$$

onde exigiremos que $\beta_i \neq 0$ para pelo menos algum $i \in \{1, \cdots, n-j\}$. É claro que $A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_j} \cong \mathbb{R}^{n-j} \setminus \{\mathbf{0}\}$, que é conexo (*note que justamente aqui que usamos a hipótese da codimensão ser pelo menos 2!*). Agora, fixe $\mathbf{0} \neq a = (a_{j+1}, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-j}$ e defina outro subespaço A homeomorfo ao $\mathbb{R}^j$ da seguinte maneira:

$$v \in A \iff v = \left(\sum_{i=1}^{j} \gamma_i e_i\right) + a_{j+1} e_{j+1} + \cdots a_n e_n$$

(note que aqui não exigimos nada dos γ). É claro que $A \cong \mathbb{R}^j$ e que* $A \cap A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_j} \neq \emptyset$ para todos $\alpha_1, \cdots, \alpha_j \in \mathbb{R}$. Note também que*:

$$A \cup \left(\bigcup_{\alpha_1,\cdots,\alpha_j \in \mathbb{R}} A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_j}\right) = \mathbb{R}^n \setminus E$$

e o resultado segue do lema 7.

Observação (O.10). *Isso sempre é possível pois $E \cong \mathbb{R}^j$.*

Observação (O.11). *Note que se $(\alpha_1, \cdots, \alpha_j) \neq \mathbf{0}$ então $(\alpha_1, \cdots, \alpha_j, a_{j+1}, \cdots, a_n)$ é testemunha desse fato.*

Observação (O.12). *A primeira inclusão é provada da seguinte maneira: se $v \in A$ ou $v \in \bigcup_{\alpha_1,\cdots,\alpha_j \in \mathbb{R}} A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_j}$, então suas j-ésimas primeiras coordenadas são combinações lineares de vetores da base de E mas há pelo menos uma coordenada das $n-j$ restantes que não é nula, de forma que $v \in \mathbb{R}^n \setminus E$. Reciprocamente, se $v \in \mathbb{R}^n \setminus E$, então ou todas as coordenadas a partir da $j+1$-ésima são iguais às de a ou isso não acontece. No primeiro caso temos $v \in A$ e no segundo temos $v \in \bigcup_{\alpha_1,\cdots,\alpha_j \in \mathbb{R}} A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_j}$.*

Usando conexidade por caminhos: Seja F um subespaço complementar de E, isto é, $\mathbb{R}^n = E \oplus F$. Tome $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus E$ e denote por $\bar{x}, \bar{y}$ as suas projeções em F. Afirmamos que o seguinte caminho liga x a y:

$$x \to \bar{x} \to_* \bar{y} \to y$$

onde cada $\to$ denota um segmento de reta, e devemos tomar o cuidado de não passar pela origem indo de $\bar{x}$ a $\bar{y}$ (o que é facilmente realizado: escolha retas passando por $\bar{x}$ e por $\bar{y}$ que não passam pela origem se intersectam em p e tome o caminho $\bar{x} \to p \to \bar{y}$).

Observação (O.13). A recíproca desse exercício também vale (e é mais fácil de provar), i.e, se E é um subespaço vetorial, $\mathbb{R}^n \setminus E$ ser conexo implica que $\dim(E) \leq n-2$.

■

3 Exercícios de compacidade

Questão 15. *Seja $K \subset \Omega$. Então K é compacto se, e somente se, toda cobertura de K por abertos de Ω admite uma subcobertura finita.*

Solução: Suponha que K é compacto e $\mathscr{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ é uma cobertura de Y por abertos de Ω. Então é claro que:

$$\{A_\alpha \cap K \mid \alpha \in J\}$$

é uma cobertura de K por abertos de K, e por hipótese uma subcobertura finita da forma:

$$\{A_{\alpha_1} \cap K, \cdots, A_{\alpha_n} \cap K\}$$

cobre K. Segue que $\{A_{\alpha_1}, \cdots, A_{\alpha_n}\}$ é uma subcobertura de $\mathscr{A}$ que cobre K.

Reciprocamente, se toda cobertura de K por abertos de Ω tem uma subcobertura finita que cobre K, mostraremos que K é compacto. De fato, se $\mathscr{A}' = \{A'_\alpha\}$ é uma cobertura de K por abertos de K, então, por definição de topologia induzida, temos que para cada A'_α, existe A_α aberto de Ω tal que:

$$A'_\alpha = A_\alpha \cap K$$

Temos que $\mathscr{A} = \{A_\alpha\}$ é uma cobertura de K por abertos de Ω, então por hipótese existe alguma subcobertura finita $\{A_{\alpha_1}, \cdots, A_{\alpha_n}\}$ que cobre K, segue que $\{A'_{\alpha_1}, \cdots, A'_{\alpha_n}\}$ é uma subcobertura finita de $\mathscr{A}'$ que cobre K.

■

Questão 16. *Mostre que um espaço métrico é fracamente sequencialmente compacto se, e somente, se, é sequencialmente compacto. Se Ω for apens um espaço topológico, qual dessas noções implica a outra? Dê um exemplo de um espaço não metrizável em que essas noções não coincidem.*

Solução: Se toda sequência em um espaço métrico tem ponto de acumulação, então é claro que toda sequência tem uma subsequência convergente, basta usar a definição para bolas abertas de raios cada vez menores com centros todos no ponto de acumulação, identicamente ao que é feito abaixo. Para a recíproca basta usar o teorema 13.11 e a proposição 13.8 das notas de aula. Um contra-exemplo que satisfaz o pedido no final do exercício é o seguinte:

Tome $I = [0,1]$ e considere I^I com a topologia produto. Temos que o mesmo é compacto pelo teorema de Tychonoff e portanto fracamente sequencialmente compacto, mas a sequência de funções $\alpha_n \in I^I$ definida por:

$$\alpha_n(x) \doteq \text{ o enésimo dígito na expansão binária de } x$$

não tem subsequência convergente. De fato, suponha por absurdo que $\{\alpha_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência que converge a algum $\alpha \in I^I$, então para cada $x \in I$, $\alpha_{n_k}(x)$ converge a $\alpha(x) \in I$. Defina $p \in I$ com a propriedade de que $\alpha_{n_k}(p) = 0$ ou 1 dependendo da paridade de k. Então a sequência $\{\alpha_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ é dada por $0, 1, 0, 1, \cdots$, que obviamente não pode convergir.

Prova de que em espaços métricos ser acumuladamente compacto é equivalente a ser sequencialmente compacto, mas que em espaços topológicos em geral a recíproca não vale: *Suponha que (Ω, d) seja fracamente sequencialmente compacto, i.e, todo subconjunto infinito tem um ponto de acumulação. Dado uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se a mesma só tiver uma quantidade finita de termos distintos, então trivialmente contém uma subsequência constante e portanto convergente. Caso a sequência contenha infinitos termos distintos, por hipótese tem um ponto de acumulação x, então defina a seguinte subsequência $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, escolhendo $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots$ de forma que:*

$$x_{n_1} \in B_d(x, 1)$$

e defina n_i indutivamente, em termos de n_{i-1}, tal que $n_i > n_{i-1}$ e:

$$x_{n_i} \in B_d\left(x, \frac{1}{i}\right)$$

o que sempre podemos fazer, já que $B_d\left(x, \frac{1}{i}\right)$ intersecta A em infinitos pontos distintos. Então é claro que $x_{n_i} \to x$. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ foi escolhida arbitrariamente, segue que Ω é sequencialmente compacto.*

Reciprocamente, vamos provar que se Ω é sequencialmente compacto, então é compacto (e sabemos que isso implicará que Ω é fracamente sequencialmente compacto, como desejado). Por hipótese valem o lema 2 e 3, portanto existe uma cobertura finita de bolas abertas de raio $\varepsilon = \dfrac{\delta}{3}$ (onde δ é como no lema **(L.3)***) e diâmetro $\dfrac{2\delta}{3}$, de forma que cada uma está contida em algum $A \in \mathscr{A}$. O conjunto consistindo de todos os A dessa forma é obviamente uma subcobertura finita de Ω, como desejado.*

Um exemplo de um espaço acumuladamente compacto mas não sequencialmente compacto (e portanto não metrizável) é $\mathbb{R}$ com a topologia gerada por $\{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Qualquer subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ não vazio tem pontos de acumulação, pois dado $a \in A$, $a - \epsilon$ é ponto de acumulação de A, já que $(a-\epsilon, \infty) \cap A \setminus \{a - \epsilon\} = a$. Note que a sequência definida por $x_n = -n$ não tem subsequência convergente nessa topologia.

■

Questão 17. *Seja $\Omega = \{0, 1\}$ e considere em Ω a topologia $\tau = \{\emptyset, \Omega\}$. Equipe $\mathbb{N}$ com a topologia discreta e considere o produto $\mathbb{N} \times \Omega$. Use esse exemplo para mostrar que nem todo espaço fracamente sequencialmente compacto é compacto.*

Solução: Afirmamos que nas condições do exercício, qualquer conjunto não vazio de $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ tem pontos de acumulação. De fato, se $S \subset \mathbb{N} \times \{0, 1\}$ é não vazio, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que ou $(n, 0) \in S$ e claramente $(n, 1)$ é ponto de acumulação (qualquer aberto básico da topologia produto contendo $(n, 1)$ intersecta S em $(n, 0) \neq (n, 1)$) ou, analogamente, $(n, 1) \in S$ e $(n, 0)$ é ponto de acumulação. Finalmente, note que $\mathscr{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\{n\} \times (0, 1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta infinita que não admite subcobertura aberta finita.

■

Questão 18. *Considere o cubo de Hilbert* $C = [0,1]^{\mathbb{N}}$ *equipado com a métrica produto, i.e,* $d(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{|x_n - y_n|}{n} \right\}$.

(a) *Mostre que nessa topologia, bolas* $B_d(x,r)$ *são conjuntos da forma* $\prod_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, nr)$ *(aqui* B *sem o índice indica a bolas de* $[0,1]$ *relativas ao valor absoluto);*

(b) *Mostre que* C *é completo;*

(c) *Verifique que* C *é totalmente limitado e conclua que* C *é compacto.*

Solução:

(a) Note que, dado $r > 0$ e tomando $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < r$, temos:

$$y \in \prod_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, nr) \iff \frac{|x_n - y_n|}{n} < r \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{6}$$

$$\iff \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{|x_n - y_n|}{n} \right\} = \max \left\{ |x_1 - y_1|, \frac{|x_2 - y_2|}{2}, \cdots, \frac{|x_{N-1} - y_{N-1}|}{N-1}, \sup_{n\geq N} \left\{ \frac{|x_n - y_n|}{n} \right\} \right\} < r \tag{7}$$

$$\iff y \in B_d(x,r) \tag{8}$$

onde na penúltima igualdade que cada um dos termos dentro dos colchetes é menor que r (veja a observação seguinte), e portanto o seu máximo também é menor que r.

Observação (O.14). *Para* $n < N$ *isso é trivial, note que se* $n \geq N$, *temos* $\frac{|x_n - y_n|}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \implies \sup_{n\geq N} \left\{ \frac{|x_n - y_n|}{n} \right\} \leq \frac{1}{N} < r$

(b) Seja $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy, com $x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \cdots) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$. Queremos mostrar que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge, isto é, achar uma sequência $y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \cdots) = (y^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $d(x_k, y) \to 0$. Faremos isso da seguinte forma:

(i) Mostraremos que se $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, então $\{x_k^{(j)}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{\pi_j(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ converge para cada $j \in \mathbb{N}$.

(ii) Usando um exercício de uma lista passada (questão 6 do parágrafo 19 do Munkres), concluíremos que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge. A completude de $[0,1]^{\mathbb{N}}$ segue imediatamente.

De fato, dados $\varepsilon > 0$ e $j_0 \in \mathbb{N}$ arbitrários, então, por hipótese, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $k_1, k_2 \geq K$ implica que:

$$d(x_{k_1}, x_{k_2}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{\left| x_{k_1}^{(n)} - x_{k_2}^{(n)} \right|}{n} \right\} < \frac{\varepsilon}{j_0}$$

Mas também é óbvio que:

$$\frac{\left| x_{k_1}^{(j_0)} - x_{k_2}^{(j_0)} \right|}{j_0} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{\left| x_{k_1}^{(n)} - x_{k_2}^{(n)} \right|}{n} \right\} < \frac{\varepsilon}{j_0} \implies \left| x_{k_1}^{(j_0)} - x_{k_2}^{(j_0)} \right| < \varepsilon$$

de onde segue que $\{x_k^{(j)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy e portanto converge a algum $y^{(j)}$ (logo o passo (i) foi realizado). Como desejado, concluímos que $\pi_j(x_k) \to \pi_j(y)$ para cada $j \in \mathbb{N}$, onde $y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \cdots) = (y^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$.

(c) Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário e tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Para cada $i > N$, tome $p_i = 1$. Fixe $i \in \{1, \cdots, N\}$. Como $[0,1]$ é totalmente limitado, existe um número finito de pontos $\{x_1, x_2, \cdots, x_M\} = A_0$ tal que:

$$x \in [0,1] \implies |x - x_j| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para algum } j \in \{1, \cdots, M\}$$

Agora, defina $A = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}} \mid x_1, x_2, \cdots, x_N \in A_0 \text{ e } x_{N+1} = x_{N+2} = \cdots = 1\}$. Existem M^N pontos em A, portanto A é finito. Além do mais, se $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$, então para cada $i \in \{1, \cdots, N\}$, existem $x_j^{(i)} \in A_0$ (o que significa que todos os x_j dependem dos i) tal que $|x_i - x_j^{(i)}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Agora, se definirmos $y_i = x_j^{(i)}$ para $i \in \{1, \cdots, N\}$ e $y_i = 1$ caso contrário, então por construção $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$, e para cada $i \in \{1, \cdots, N\}$, temos que $\frac{|x_i - y_i|}{n} \leq |x_i - y_i| < \frac{\varepsilon}{2}$, também para cada $i > N$, vale que $\frac{|x_i - y_i|}{i} \leq \frac{1}{i} < \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$, logo $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\frac{|x_n - y_n|}{n}\right\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ e segue que $[0,1]^{\mathbb{N}} = \bigcup_{a\in A} B(a, \varepsilon)$.

■

Questão 19. *Seja Ω um espaço compacto Hausdorff. Seja $f : \Omega \cup \{\infty\} \to \mathbb{R}$ uma função semicontínua inferiormente. Então f é limitada inferiormente, i.e, $\inf_{x\in\Omega} f(x) > -\infty$, e existe $x \in \Omega$ tal que $f(x) = \inf_{x\in\Omega} f(x)$.*

Solução:

Observação (O.15). Há um erro de digitação no enunciado. Apesar de não fazer diferença, a questão é: *Seja Ω um espaço compacto Hausdorff. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ semicontínua inferiormente. Então f é limitada inferiormente, i.e, o infímo da imagem de Ω_1 existe e f atinge seu ínfimo em Ω_1.*

Seja* $m = \inf f(\Omega)$. Para cada n, defina $C_n = f^{-1}(\left(-\infty, m + \frac{1}{n}\right])$. Note que $C = \{C_n\}$ satisfaz a propriedade da interseção finita, pois:

$$\begin{aligned}
&f^{-1}\left(\left(-\infty, m + \frac{1}{n_1}\right]\right) \bigcap f^{-1}\left(\left(-\infty, m + \frac{1}{n_2}\right]\right) \bigcap \cdots \bigcap f^{-1}\left(\left(-\infty, m + \frac{1}{n_k}\right]\right) \\
&= f^{-1}\left(\left(-\infty, m + \frac{1}{n_1}\right] \bigcap \left(-\infty, m + \frac{1}{n_2}\right] \cdots \bigcap \left(-\infty, m + \frac{1}{n_k}\right]\right) \\
&= f^{-1}\left(\left(-\infty, m + \frac{1}{n_j}\right]\right), \text{ onde } n_j = \max\{n_1, \cdots, n_k\} \\
&\neq \emptyset \text{ pela definição de infímo}
\end{aligned}$$

Logo (pois Ω é compacto), $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$. Mas se $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$, então $f(x) \leq m$, e como m é infímo, $f(x) = m$ e segue que f atinge seu ínfimo, como desejado.

Observação (O.16). *O ínfimo de $f(\Omega)$ existe, pois $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$, com $U_\alpha = f^{-1}((\alpha, \infty))$ é uma cobertura aberta que admite subcobertura finita e portanto $f(\Omega)$ é limitado por baixo.*

Observação (O.17). *Note que provamos algo mais forte, pois em momento algum usamos a hipótese de que Ω é Hausdorff (só de ser compacto já basta). Note também que o ∞ foi colocado no exercício sem necessidade. Caso o erro de digitação não fosse erro de digitação, teríamos que o ∞ foi introduzido sem propósito algum, jogado fora depois. Se não tivesse sido jogado fora o exercício também estaria falso (pois sequer especifica a topologia de $\Omega \cup \{\infty\}$), considere $\Omega = [0,1]$ e coloque em $\Omega \cup \{\infty\}$ a topologia $\tau_{[0,1]} \cup \{\{\infty\}, \Omega \cup \{\infty\}\}$, então pondo $f(x) = 2$ se $x \in [0,1]$ e $f(\infty) = 1$, $\inf f(\Omega \cup \{\infty\})$ não é atingido em Ω.*

■

Questão 20. *Considere $[0,1]^{\mathbb{N}}$ com a topologia uniforme. Encontre nesse espaço um subconjunto infinito sem pontos de acumulação.*

Solução:

Observação (O.18). *A métrica da topologia uniforme é dada por:*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup \left\{ \overline{d}\,(x_\alpha, y_\alpha) \mid \alpha \in J \right\}$$

onde $\overline{d}$ é a métrica limitada padrão de $\mathbb{R}$.

Agora, para cada $j \in \mathbb{N}$ defina $e_j \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ pondo $\pi_i(e_j) = 1$ se $i = j$ e $\pi_i(e_j) = 0$ caso contrário. Afirmamos que $E = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{e_j\} = \{e_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$ não tem pontos de acumulação. De fato, se $p \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ é ponto de acumulação, então $B = B_d\left(p, \frac{1}{3}\right)$ (onde d é a métrica da topologia uniforme), então por hipótese existem infinitos pontos distintos de E em B. Isso é um absurdo, pois B não pode conter nem mesmo dois pontos distintos de E: se $i \neq k$, então $d(e_i, e_k) = 1 > \sup_{x,y \in B} d(x,y) = \operatorname{diam}(B) = \frac{2}{3}$.

Prova alternativa: de fato, lembrando do lema **(L.4)**, *se pormos $\varepsilon = \frac{1}{2}$, por exemplo, então dado $e_k \in E$, para todo $e_j \neq e_k$, temos $d(e_k, e_j) = 1 > \frac{1}{2}$, por exemplo, então dado $e_k \in E$, para todo $e_j \neq e_k$, temos $d(e_k, e_j) = 1 > \frac{1}{2}$, e portanto nenhum ponto de E é ponto de acumulação. Mostraremos agora que também vale que nenhum ponto fora de E é ponto de acumulação, e portanto E' é vazio:*
Dado $x \in E^c$, podemos supor que existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a = d(x, e_{j_0}) \in (0,1)$ (caso contrário teríamos $d(x, e_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e a prova acabaria). Pela desigualdade triangular, para todo $i \neq j$, temos;

$$d(x, e_i) + d(x, e_j) = d(e_i, x) + d(x, e_j) \geq d(e_i, e_j) = 1 \implies d(x, e_i) \geq 1 - d(x, e_j)$$

para todo $j \neq i$. Em particular, $d(x, e_i) \geq 1 - a > \frac{1-a}{2}$ para todo $i \neq j_0$. Assim, temos que $d(x, e_i) > \max\{\frac{1-a}{2}, \frac{a}{2}\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e segue que x não é ponto de acumulação.

■

Questão 21. *Mostre que $[0,1]$ como subespaço de $\mathbb{R}_\ell$ não é f.s.c.*

Solução: Aqui mostraremos que $[0,1]$ como subespaço de $\mathbb{R}_l$ não é acumuladamente compacto. O resultado seguirá imediatamente, pois se fosse fracamente sequencialmente compacto, seria acumuladamente compacto, como já observado anterioremente.

Mostraremos que $A = \left\{1 - \frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ não tem pontos de acumulação. De fato, se $x = 1 - \frac{1}{n} \in A$, então temos

$$1 - 1/n \in \left[1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

mas $\left[1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}\right) \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$, logo x não é ponto de acumulação. Caso $x \in (0,1)$ com $x \notin A$, então $x \in \left[1 - \frac{1}{j}, 1 - \frac{1}{j+1}\right) = U_x$ para algum $j \in \mathbb{N}$ mas $\left[x, 1 - \frac{1}{j+1}\right) \cap A = \emptyset$ e então x não é ponto de acumulação. Trivialmente se $x > 1$ ou $x < 0$ então x não é ponto de acumulação, então resta mostrar que 1 não é ponto de acumulação. Isto é claro, pois $[1,2) \cap [0,1] = \{1\}$.

Observação (O.19). *Uma solução mais direta e elegante é notar que todo ponto de acumulação numa topologia mais fina é necessariamente ponto de acumulação na topologia mais grossa, portanto se A tivesse pontos de acumulação em $\mathbb{R}_l$ eles teriam de ser pontos de acumulação de A em $\mathbb{R}$ também, mas o único ponto de acumulação de A em $\mathbb{R}$ é 1, que não é ponto de acumulação de A em $\mathbb{R}_l$ pois $\{1\} = [0,1] \cap [1,2)$ é um aberto de $[0,1]$ que não intersecta A.*

■

Questão 22. *Mostre que o círculo $\mathbb{S}^1$ com a topologia induzida de $\mathbb{R}^2$ é compacto.*

Solução: Mostraremos que $\mathbb{S}^1$ é fechado e limitado, seguirá que é compacto. De fato $\mathbb{S}^1$ é fechado, pois $\mathbb{S}^1 = f^{-1}(\{1\})$, imagem inversa de fechado e portanto fechado, onde $f(x,y) = x^2 + y^2$. É limitado pois está contido na bola aberta (com a topologia padrão de $\mathbb{R}^2$) de centro $(0,0)$ e raio 2.

■

Questão 23. *Mostre que $[0,1]$ não é compacto como subespaço de $\mathbb{R}_K$.*

Solução: É fácil ver que $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde:

$$U_n = \left\{\left(\frac{1}{n}, 2\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \bigcup (-1,1) - K$$

é uma cobertura aberta que não admite subcoobertura aberta finita.

■

Questão 24. *Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ uma sequência convergente com limite x. Mostre que $\{x\} \cup \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é compacto.*

Solução: Seja $\mathscr{A}$ uma cobertura aberta de $\Omega = \{x\} \cup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .Como $\mathscr{A}$ é cobertura, existe $A_0 \in \mathscr{A}$ contendo x. Como A_0 é uma vizinhança aberta de x e por hipótese $x_n \to x$, A_0 contém todos termos da sequência a partir de certo $N \in \mathbb{N}$, isto é, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_N, x_{N+1}, \cdots\} \in A_0$. Para cada x_i com $1 \leq i \leq N-1$, usaremos que $\mathscr{A}$ é cobertura e escolheremos $A_1, \cdots, A_{N-1} \in \mathscr{A}$ tal que $x_i \in A_i$ para todo $1 \leq i \leq N-1$. Então é claro que:

$$\{A_0, A_1, \cdots, A_{N-1}\}$$

é uma subcobertura aberta finita de Ω.

■

Questão 25. *Mostre que qualquer espaço métrico compacto Ω é homeomorfo a algum subconjunto do cubo de Hilbert. (Sugestão Ω é separável (justifique), então seja $\{x_1, x_2, \ldots\}$ um subconjunto denso em Ω. Defina $F : \Omega \to C$ pondo $F(x) = (d(x, x_1), d(x, x_2), \ldots)$ e mostre que F é um homeomorfismo).*

Solução: Já provamos que (Ω, d) é separável no lema **(L.6)** e sabemos que qualquer função contínua e bijetora de um espaço compacto num espaço Hausdorff é um homeomorfismo. Note que, sem perda de generalidade, podemos assumir que $d(x, y) \leq 1$ para todo $x, y \in \Omega$ (se isso não acontecesse poderíamos simplesmente usar a métrica limitada padrão, que é equivalente). Sendo $A = \{x_1, x_2, \cdots\}$ um subconjunto denso de Ω, então afirmamos que o homemomorfismo desejado é:

$$\begin{aligned} &F : (\Omega, d) \to F(\Omega) \subset C = [0, 1]^{\mathbb{N}} \\ &x \mapsto (d(x, x_1), d(x, x_2), \cdots) \end{aligned}$$

onde a topologia em $F(\Omega)$ é a induzida de C. De fato, como F é por construção sobrejetiva e $F(\Omega)$ é Hausdorff (pois $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ é Hausdorff e obviamente qualquer subespaço de um espaço Hausdorff é Hausdorff também), tudo que nos resta é provar que F é injetora (já que - pelo lema 6 - as funções coordenadas de F são contínuas e portanto F é contínua). Ora, se $f(x) = f(y)$ para $x, y \in \Omega$, então:

$$\begin{aligned} &d(x, x_1) = d(y, x_1) \\ &d(x, x_2) = d(y, x_2) \\ &\vdots \\ &d(x, x_n) = d(y, x_n) \ \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

e note que, como A é denso, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $x_k \in A$ tal que $d(x, x_k) = d(y, x_k) < \dfrac{\varepsilon}{1332}$. Segue que para todo $\varepsilon > 0$, temos:

$$d(x, y) \leq d(x, x_k) + d(y, x_k) < \frac{\varepsilon}{1332} + \frac{\varepsilon}{1332} = \frac{\varepsilon}{666} < \varepsilon$$

e concluímos que $x = y$.

■

1 INFINITUDE DOS PRIMOS

a) Tome $m, k, s, t \in \mathbb{Z}$ e note que se $A_{m,k} \cap A_{s,t} = (m\mathbb{Z} + k) \cap (s\mathbb{Z} + t) \neq \emptyset$, então contém algum $c \in \mathbb{Z}$, e então afirmamos que:
$$(m\mathbb{Z} + k) \cap (s\mathbb{Z} + t) = \text{mmc}(m, s)\mathbb{Z} + c$$
De fato, se c pertence à interseção, então c somado de qualquer múltiplo comum de m e s também pertencem (para garantir que não deixemos de incluir nenhum, começamos do mínimo múltiplo comum). A inclusão contrária é um pouco menos trivial: dado $x \in (m\mathbb{Z} + k) \cap (s\mathbb{Z} + t)$, note que $x - c \equiv 0 \pmod m$ e $x - c \equiv 0 \pmod s$ (é fácil ver que a subtração de quaisquer dois elementos de $m\mathbb{Z}$ ou $s\mathbb{Z}$ é divísivel por m ou s, respectivamente - em particular, para x e c isso também vale), donde segue que $x - c \equiv 0 \pmod{\text{mmc}(m, s)}$, como desejado.

Dado qualquer $x \in \mathbb{Z}$, temos $x \in A_{1,0}$, de forma que a primeira condição para ser base é facilmente satisfeita. Como já provamos a segunda, concluímos que $\mathscr{B} = \{A_{m,k} \mid m, k \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$ é de fato uma base para uma topologia em $\mathbb{Z}$.

b) Por definição, elementos da base são abertos, de forma que só precisamos provar agora que $A_{m,k}$ é fechado. Note que:
$$\mathbb{Z} \setminus A_{m,k} = \bigcup_{i=1}^{m-1} A_{m,k+i}$$
pois $A_{m,k}$ é a união de todas as progressões aritméticas $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de razão k tal que a_1 é congruente a k módulo m. Seu complementar é, portanto, a união de todas as progressões aritméticas de razão k tal que a_1 é congruente a $k + 1, k + 2, \cdots, k + m - 1$ módulo m. Como o lado direito da igualdade é uma união de abertos, segue que $A_{m,k}$ é fechado.

c) Por definição, abertos não vazios de qualquer topologia em qualquer conjunto sempre contém elementos da base. Nesse caso, notamos que, por construção, elementos de $\mathscr{B}$ sempre contém uma progressão aritmética infinita, de forma que qualquer aberto não vazio não pode ser finito.

d) Sabemos pelo teorema fundamental da aritmética que os únicos inteiros que não são múltiplos inteiros de algum número primo são -1 e 1, de onde segue imediatamente que:
$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = B = \bigcup_{p\in P} A_{p,0} = 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z} \cdots$$

e) A cardinalidade de P não importa para que B seja aberto, pois B é, por definição, uma união de abertos. A observação pertinente à prova da infinitude dos primos que será usada no próximo item é a seguinte: se P for finito, o lado direito da igualdade acima é uma união finita de fechados (já provamos que todos elementos de $\mathscr{B}$ são clopen), isto é, B é fechado.

f) Provamos em c) que nenhum conjunto finito pode ser aberto, ou, equivalentemente, que o complemento de um conjunto finito não pode ser fechado. Em e) também notamos que se P for finito, então B é fechado, o que é uma contradição, pois B é o complementar de $\{-1, 1\}$, um conjunto finito! Concluímos que P é infinito.

2 AXIOMAS DE KURATOWSKI

a) Primeiro observemos que um conjunto F é fechado se, e somente se, $F = \overline{F}$. De fato, se F é fechado, F é necessariamente o menor conjunto fechado contendo F, e, por definição, segue que $F = \overline{F}$. Reciprocamente, se $F = \overline{F}$, temos que F é fechado, pois $\overline{F}$ é, por definição, uma interseção de conjunto fechados e portanto também fechado. Tendo isso em mente, note que:

   i) $\Omega \setminus \emptyset = \Omega$, que é aberto por definição de topologia. Assim, $\emptyset$ é fechado e segue que $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

   ii) O fecho de A é definido como a interseção de todos os fechados que contém A, ou, equivalentemente, como o menor conjunto fechado que contém A. Portanto segue diretamente da definição que $A \subset \overline{A}$.

   iii) O fecho de A é fechado, e pela nossa observação inicial, segue que $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

   iv) Observe que $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$, pois $\overline{B}$ é fechado e contém B, que contém A. Como $\overline{B}$ é um fechado que contém A, segue por definição que $\overline{A} \subset \overline{B}$. Dito isso, notemos que $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$, de onde segue que $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ e $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, logo $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Para provar a inclusão reversa, note também que $\overline{A} \cup \overline{B}$ é fechado e contém $A \cup B$, e como definimos o fecho como o *menor* fechado que contém o conjunto, segue que $\overline{A} \cup \overline{B} \supset \overline{A \cup B}$. Concluímos que $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

b) Usaremos o seguinte resultado (cuja prova é muito fácil e não convém aqui, só envolve as leis de deMorgan):

   Seja $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ tal que:

   i) $\emptyset$ e Ω estão em $\mathscr{C}$

   ii) uniões finitas de elementos de $\mathscr{C}$ ainda estão em $\mathscr{C}$

   iii) interseções arbitrárias de elementos de $\mathscr{C}$ ainda estão em $\mathscr{C}$

   Então $\{\Omega \setminus C \mid C \in \mathscr{C}\}$ é uma topologia em Ω. Defina $\mathscr{F} = \{A \subset X \mid A = F(A) = \overline{A}\}$. Afirmamos que $\mathscr{F}$ satisfaz i), ii) e iii). De fato:

   i) Temos $F(\emptyset) = \emptyset$. Note que $F(\Omega) = \Omega$, pois $\Omega \subset F(\Omega)$ por definição e $F(\Omega) \subset \Omega$ pois F é uma função de $\mathscr{P}(\Omega)$ em $\mathscr{P}(\Omega)$.

   ii) Se $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{F}$, então $A_1 \cup A_2 = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} = \overline{A_1 \cup A_2} \in \mathscr{F}$ e segue por indução que $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} \in \mathscr{F}$.

   iii) Pelo segundo axioma, sendo $\mathcal{I}$ um conjunto arbitrário de indíces, então $\displaystyle\bigcap_{i \in \mathcal{I}} C_i \subset \mathrm{F}\left(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} C_i\right)$.

   Observe também que uma consequência imediata do terceiro axioma é que F preserva inclusões, de forma que:

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} C_i \subset C_i \forall i \in \mathcal{I} \Rightarrow \mathrm{F}\left(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} C_i\right) \subset \mathrm{F}(C_i) = C_i \forall i \in \mathcal{I} \Rightarrow \mathrm{F}\left(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} C_i\right) \subset \bigcap_{i \in \mathcal{I}} C_i$$

   e, como desejado, a interseção arbitrária é fechada e portanto pertence a $\mathscr{F}$. A topologia induzida por F é, então, $\tau = \{\Omega \setminus A \mid A = F(A)\}$. A mesma também é única, pois dado qualquer $A \subset \Omega$, o conjunto $F(A)$ é o fecho de A no espaço topológico (Ω, τ): de fato, dado $A \subset \Omega$, como $F(F(A)) = F(A)$, sabemos que $F(A) \in \mathscr{F}$, e do primeiro axioma sabemos que $A \subset F(A)$. Se K é qualquer outro elemento de $\mathscr{F}$ contendo A, então $F(A) \subset F(K) = K$, e concluímos que

$F(A)$ é o menor elemento de $\mathscr{F}$ contendo A, como desejado. Segue que todo operador fecho de Kuratowski determina e é determinado por uma única topologia.

c) Observemos que nesse caso $F(A) = \overline{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nA$. Assim:

i) é satisfeita trivialmente, pois $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\emptyset = \emptyset$

ii) segue diretamente do fato de que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nA = A \cup 2A \cup \cdots$

iii) por definição, temos que $F(A) = A \iff A$ contém todos os múltiplos de elementos de A. $F(A)$ satisfaz essa condição pela sua própria definição, de forma que $F(F(A)) = F(A)$, como desejado.

iv) $\overline{A} \cup \overline{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nA \bigcup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nA \cup nB = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n(A \cup B) = \overline{A \cup B}$

Pela observação em iii), os fechados dessa topologia são os conjuntos $k\mathbb{N}$ com $k \in \mathbb{N}$ ou uniões ou interseções finitas dos mesmos. Os abertos são os complementares desses fechados. Defina B_n da seguinte maneira: $a \in \mathbb{N} \in B_n \iff a|n$, isto é, B_n é o conjunto contendo n e todos os seus divisores. Afirmamos que:

$$\mathscr{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

é uma base para τ. De fato, dado qualquer aberto U de $\mathbb{N}$ e $x \in U$ temos $x \in B_x \subset U$, pois se $B_x \not\subset U$, então $a \in B_x \implies a \in U^c$, que é fechado, daí, como a divide x e U^c é fechado e contém todos os múltiplos de seus elementos, segue que $x \in U^c$, um absurdo! Para verificar a segunda condição de base, note que se $x \in B_{k_1} \cap B_{k_2}$, então $x|k_1$ e $x|k_2$, donde segue que $x|mdc(k_1, k_2) = k_3$ e portanto $x \in B_{k_3} \subset B_{k_1} \cap B_{k_2}$.

d) Suponha que f é contínua e $m|n$, isto é, $n = km$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Então:

$$f(n) \in f(m\mathbb{N}) = f(\overline{\{m\}}) \subset \overline{f(\{m\})} = \overline{\{f(m)\}} = f(m)\mathbb{N}$$

e concluímos que $f(m)|f(n)$. Reciprocamente, se $m|n \implies f(m)|f(n)$, mostraremos que dado qualquer $A \subset \mathbb{N}$, temos $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, i.e, f é contínua. De fato, se $y \in f(\overline{A}) = f\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nA\right)$, então $y \in f(n_0 A)$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Daí $y = f(n_0 a)$ para algum $a \in A$. Como $a|n_0 a$, temos, por hipótese, que $f(a)|f(n_0 a)$, logo existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $y = f(n_0 a) = kf(a) \in kf(A) \subset \overline{f(A)}$, como desejado.

3 NÚMEROS DE LIOUVILLE

a) Pela definição dos números de Liouville, note que podemos escrever

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ é um número de Liouville}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$$

onde:

$$U_n = \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} : 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \right\} = \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right) \setminus \left\{ \frac{p}{q} \right\}$$

Observe que $\overline{U_n} \supset \mathbb{Q}$ pois os $\overline{U_n}$ contém cada $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. De fato, se $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, então temos

$$\frac{p}{q} \in \overline{\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right) \setminus \left\{ \frac{p}{q} \right\}} \subset \overline{U_n} \implies \overline{\overline{U_n}} = \overline{U_n} \supset \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \implies \overline{U_n} = \mathbb{R}$$

Assim, escrevemos $\mathbb{L}$ (é fácil ver, pela nossa própria construção dos U_n e pela definição de números de Liouville, que se x é número de Liouville, então $x \in U_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e, vice versa, se x está na interseção, então por definição é número de Liouville) como uma interseção enumerável de abertos (pois cada U_n é a união de abertos) densos de $\mathbb{R}$. Segue que $\mathbb{L}$ é um G_δ.

b) Provaremos o seguinte corolário do Teorema de Baire, donde o resultado segue imediatamente:

Seja X um espaço métrico completo (não vazio) sem pontos isolados e $D \subset X$ um subconjunto G_δ de X. Então D é não enumerável.

Suponha que $D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$, onde cada U_n é um aberto denso. Podemos escrever $X \setminus D = \bigcap_{x \in D} X \setminus \{x\}$. Note que cada $X \setminus \{x\}$ é um aberto denso, pois $x \in D$ não é ponto isolado. Então, supondo por absurdo que D é enumerável, temos que

$$\varnothing = D \cap (X \setminus D) = \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \right) \bigcap \left(\bigcap_{x \in D} X \setminus \{x\} \right)$$

ou seja, exibimos uma interseção enumerável de abertos densos que é vazia, contradizendo o Teorema de Baire. Segue que D é não enumerável.

De fato podemos concluir que $\mathbb{L}$ é não enumerável, pois, como provamos anteriormente, $\mathbb{L}$ é um subconjunto G_δ de $\mathbb{R}$, um espaço métrico completo sem pontos isolados.

Lema 1. *Seja* (Ω_1, d_1) *um espaço métrico compacto e* (Ω_2, d_2) *um espaço métrico arbitrário e suponha que* $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ *é contínua. Então* f *é uniformemente contínua.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, pela hipótese de continuidade de f, para cada $x \in \Omega_1$ existe δ_x tal que $f(B_{d_1}(x, \delta_x)) \subset B_{d_2}\left(f(x), \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Como Ω_1 é compacto, a cobertura aberta $\left\{B_{d_1}\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right)\right\}_{x\in\Omega_1}$ admite uma subcobertura finita $\left\{B_{d_1}\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right)\right\}_{i=1}^{n}$. Agora, tomando $\delta \doteq \min\limits_{1\leq i\leq n} \dfrac{\delta_{x_i}}{2}$, afirmamos que:

$$d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

De fato, isso acontece pois:

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_2(f(x), f(x_i)) + d_2(f(x_i), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

onde usamos que $x_i \in B_{d_1}\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right) \subset B_{d_1}(x_i, \delta_{x_i}) \implies f(x_i) \in B_{d_2}\left(f(x), \frac{\varepsilon}{2}\right)$ e também que:

$$d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) < \frac{\delta_{x_i}}{2} + \frac{\delta_{x_i}}{2} = \delta_{x_i} \implies f(y) \in B_{d_2}\left(f(x_i), \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

■

Notação. Pondo $\|f\| = \sup\limits_{x\in\Omega} |f(x)|$ induzimos uma métrica em $\mathscr{C}(\Omega, \mathbb{R})$ (o espaço das funções contínuas de Ω para $\mathbb{R}$) dada por $d(f, g) = \sup\limits_{x\in\Omega} |f(x) - g(x)|$.

1 PROBLEMA 1

Usando algumas desigualdades bem conhecidas do Cálculo e a definição de supremo, temos que:

$$|T(f(x))| = \left|\int_0^1 K(x, y)f(y)\ \mathrm{dy}\right| \leq \int_0^1 |K(x, y)\|f(y)|\ \mathrm{dy} \leq \sup_{x,y\in[0,1]^2} |K(x, y)| \cdot \sup_{y\in[0,1]} |f(y)| = \|K\| \cdot \|f\| \leq \|K\|$$

de forma que $\{T(f) \mid \|f\| \leq 1\}$ é pontualmente limitada. Para aplicar Arzelà-Ascoli e terminarmos o exercício, resta mostrar que é também equicontínua. De fato, pelo lema 1, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, x' \in [0, 1]$ com $|x - x'| < \delta \implies |K(x, y) - K(x', y)| < \dfrac{\varepsilon}{2\|f\|}$ para todo $y \in [0, 1]$, e assim:

$$\begin{aligned}
|T(f(x)) - T(f(x'))| &= \left|\int_0^1 K(x, y) f(y)\ \mathrm{dy} - \int_0^1 K(x', y) f(y)\ \mathrm{dy}\right| \\
&= \left|\int_0^1 (K(x, y) - K(x', y)) f(y)\ \mathrm{dy}\right| \\
&\leq \int_0^1 |K(x, y) - K(x', y)\| f(y)|\ \mathrm{dy} \\
&\leq \sup_{y\in[0,1]} |K(x, y) - K(x', y)| \cdot \|f\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\|f\|} \cdot \|f\| \\
&= \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

como desejado (note que, em particular, isso implica que $T(f) \in C([0, 1], \mathbb{R})$). O resultado segue pelo teorema de Arzelà-Ascoli.

2 PROBLEMA 2

Primeiramente, notemos que $\mathscr{F} = \{f \in \mathscr{C}(\Omega, \mathbb{R}) \mid \|f\| \leq 1 \text{ e } \mathrm{Hol}_\alpha(f) \leq 1\}$ é equicontínua. De fato, dado $f \in \mathscr{F}$ e $\varepsilon > 0$, então é claro que para todos $x, y \in \Omega$ com $d(x,y) < \delta \doteq \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$, temos que:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \mathrm{Hol}_\alpha(f) d(x,y)^\alpha \\ &\leq d(x,y)^\alpha \\ &< \delta^\alpha \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

É óbvio também que $\mathscr{F}$ é pontualmente limitada, pois dado $x \in \Omega$ e $f \in \mathscr{F}$, temos $|f(x)| \leq \|f\| \leq 1$. Por Arzelà-Ascoli segue que $\overline{\mathscr{F}}$ é compacto, de forma que só resta mostrarmos que $\mathscr{F} = \overline{\mathscr{F}}$.

Com efeito, note que basta mostrarmos que todo limite de uma sequência de $\mathscr{F}$ também pertence a $\mathscr{F}$ (isso é consequência do lema 21.2 do Munkres, visto em sala). De fato, se $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathscr{F}^{\mathbb{N}}$ converge a algum $f \in \mathscr{C}(\Omega, \mathbb{R})$, então dado $\varepsilon > 0$ podemos escolher $n \in \mathbb{N}$ de forma que $\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$, e segue que:

$$\begin{aligned} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\alpha} &\leq \frac{|f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|}{d(x,y)^\alpha} && (1) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{d(x,y)^\alpha} + \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{d(x,y)^\alpha} && (2) \\ &\leq 1 + \frac{\varepsilon}{d(x,y)^\alpha} && (3) \end{aligned}$$

e como isso é válido para todo $\varepsilon > 0$, temos que:

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\alpha} \leq 1$$

donde concluímos que $\mathrm{Hol}_\alpha(f) \leq 1$, como desejado. Resta mostrar que $\|f\| \leq 1$. De fato isso é verdade, pois dado $x \in \Omega$ arbitrário, temos que $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $[-1, 1]$ que converge para $f(x)$, portanto $|f(x)| \leq 1$ e segue que $\|f\| \leq 1$.

Observação. Para ir de (2) para (3) note que por hipótese temos $\mathrm{Hol}_\alpha(f_n) \leq 1$. Também não foi explicitada a hipótese frequentemente usada de que $x \neq y$ pois a mesma é auto evidente.